

Aufgabe 5.79

Lösen Sie die Gleichung $z^2 + iz - 1 - i = 0$ mit Hilfe der üblichen Lösungsformel für quadratische Gleichungen!

Lösung:

$$z_{1/2} = -\frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{i^2}{4} + 1 + i} = -\frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{-1+4+4i}{4}} = \frac{-i \pm \sqrt{3+4i}}{2}$$

$$|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5, \quad \varphi = \arctan \frac{4}{3} = 53.130102^\circ \text{ (da I. Quadrant),}$$

$$3+4i = 5(\cos 53.130102^\circ + i \sin 53.130102^\circ) = 5(\cos 413.130102^\circ + i \sin 413.130102^\circ)$$

$$\sqrt{3+4i} = \begin{cases} \sqrt{5}(\cos 26.565051^\circ + i \sin 26.565051^\circ) = 2+i \\ \sqrt{5}(\cos 206.565051^\circ + i \sin 206.565051^\circ) = -2-i \end{cases}$$

$$z_{1/2} = \frac{-i \pm (\pm(2+i))}{2} = \frac{-i \pm (2+i)}{2} = \begin{cases} 1 \\ -1-i \end{cases}$$

(Probe: $(z-z_1)(z-z_2) = (z-1)(z+1+i) = z^2+z+iz-z-1-i = z^2+iz-1-i$.)