Aufgabe 5.76

a) Ermitteln Sie die Quadratwurzeln aus $-\frac{15}{4}+2\mathrm{i}$ mit Hilfe der Moivreschen Formel!

b) Lösen Sie die Gleichung $z^2-(3-2\mathrm{i})z+(5-5\mathrm{i})=0$ mit Hilfe der üblichen Lösungsformel für quadratische Gleichungen!

Lösung:

a) $r=\sqrt{\frac{225}{16}+\frac{64}{16}}=\sqrt{\frac{289}{16}}=\frac{17}{4}=4.25,$

$$\varphi=\arctan\left(-\frac{2}{\frac{15}{4}}\right)+180^\circ=\arctan(-\frac{8}{15})+180^\circ\approx 151.93^\circ \mathrel{\widehat{=}} 511.93^\circ \text{ (II. Quadrant)},$$

$$-\frac{15}{4}+2\mathrm{i}\approx 4.25(\cos 151.93^\circ+\mathrm{i}\sin 151.93^\circ)=4.25(\cos 511.93^\circ+\mathrm{i}\sin 511.93^\circ),$$

$$\sqrt{-\frac{15}{4}+2\mathrm{i}}=\begin{cases}\sqrt{4.25}(\cos 75.96^\circ+\mathrm{i}\sin 75.96^\circ)=\frac{1}{2}+2\mathrm{i}\\ \sqrt{4.25}(\cos 255.96^\circ+\mathrm{i}\sin 255.96^\circ)=-\frac{1}{2}-2\mathrm{i}\end{cases}$$

b) $$z_{1/2}=\frac{3}{2}-\mathrm{i}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\mathrm{i}\right)^2-5+5\mathrm{i}}=\frac{3}{2}-\mathrm{i}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-3\mathrm{i}-1-5+5\mathrm{i}}=\frac{3}{2}-\mathrm{i}\pm\sqrt{-\frac{15}{4}+2\mathrm{i}}$$
$$=\frac{3}{2}-\mathrm{i}\pm(\frac{1}{2}+2\mathrm{i})=\begin{cases}2+\mathrm{i}\\ 1-3\mathrm{i}\end{cases}$$