Aufgabe 5.75

Lösen Sie die Gleichung $z^4-4z^3+6z^2-4z+5=0$!

Lösung:

$$z^4-4z^3+6z^2-4z+5=z^4-4z^3+6z^2-4z+1+4=(z-1)^4+4=0$$

$$(z-1)^4=-4=4(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=4(\cos 3\pi+\mathrm{i}\sin 3\pi)=4(\cos 5\pi+\mathrm{i}\sin 5\pi)=4(\cos 7\pi+\mathrm{i}\sin 7\pi)$$

$$z-1=\begin{cases}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) &= \ \ 1+\mathrm{i}\\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) &= -1+\mathrm{i}\\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right) &= -1-\mathrm{i}\\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right) &= \ \ 1-\mathrm{i}\end{cases}$$

$$z_{1/2/3/4}=\begin{cases}2\pm\mathrm{i}\\ \ \ \pm\mathrm{i}\end{cases}$$

Probe:

$$\begin{aligned}(z-2-\mathrm{i})(z-2+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i}) &= \left((z-2)^2+1\right)\left(z^2+1\right)\\ &= (z-2)^2z^2+(z-2)^2+z^2+1=z^4-4z^3+4z^2+z^2-4z+4+z^2+1\\ &= z^4-4z^3+6z^2-4z+5\end{aligned}$$