Aufgabe 5.73

Sei a eine positive reelle Zahl und $z=-8a^2+8a^2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

a) Geben Sie die Polar- und die exponentielle Darstellung von z an!
b) Bestimmen Sie alle vierten Wurzeln aus z !

Lösung:

a) $z=-8a^2+8a^2\sqrt{3}\,\mathrm{i}=8a^2(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}),\quad |z|=8a^2\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=8a^2\sqrt{1+3}=16a^2,$

$$\varphi=\arctan\frac{8a^2\sqrt{3}}{-8a^2}+\pi=\arctan\left(-\sqrt{3}\right)+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}\quad \text{(da II. Quadrant)}$$

$$z=16a^2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=16a^2\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$$

b)
$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{16a^2}\left(\cos\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right)$$
$$=2\sqrt{a}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right)\right),\qquad k=0,1,2,3$$
$$=\begin{cases}2\sqrt{a}\,(\cos\ 30^\circ+\mathrm{i}\sin\ 30^\circ)\\ 2\sqrt{a}\,(\cos 120^\circ+\mathrm{i}\sin 120^\circ)\\ 2\sqrt{a}\,(\cos 210^\circ+\mathrm{i}\sin 210^\circ)\\ 2\sqrt{a}\,(\cos 300^\circ+\mathrm{i}\sin 300^\circ)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\sqrt{a}\,(\sqrt{3}+\mathrm{i})\\ \sqrt{a}\,(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})\\ \sqrt{a}\,(-\sqrt{3}-\mathrm{i})\\ \sqrt{a}\,(1-\sqrt{3}\mathrm{i})\end{cases}$$