Aufgabe 5.67

Wo steckt der Fehler in der Gleichungskette $\mathrm{i}^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$?

Lösung:

Wurzelziehen im Komplexen:

Moivresche Formel: $\sqrt[n]{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \sqrt[n]{r}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{n}}$,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

d.h. Wurzel aus Betrag ziehen, Winkel durch Wurzelexponenten dividieren

Wegen der Periodizität kann statt φ auch $\varphi + 2k\pi$ geschrieben werden, dann erhält man

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

Damit ergeben sich n verschiedene Werte für die Wurzel $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$, erst für $k = n$ gilt $\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} = \cos\frac{\varphi}{n}$, $\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n} = \sin\frac{\varphi}{n}$. Im Komplexen ist deshalb auch die Quadratwurzel nicht eindeutig, es ergeben sich $n = 2$ verschiedene Werte:

$\sqrt{-1} = \pm\mathrm{i}$ (wirkt sich in der Gleichungskette nicht aus),
$\sqrt{1} = \pm 1$ führt zu dem Fehler.