Aufgabe 5.65

Berechnen Sie durch Auswertung von $(1+\mathrm{i})^n$ mit der binomischen Formel und mit der Moivreschen Formel die Summen $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k}$ und $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}$!

Lösung:

Es gilt $(1+\mathrm{i})^n=\sum\limits_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\mathrm{i}^{\,l}=\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k}+\mathrm{i}\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}$.

Mit der Moivreschen Formel erhält man $(1+\mathrm{i})^{\,n}=\sqrt{2}^{\,n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$, so dass sich durch Vergleich der Real- und Imaginärteile

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k}=\sqrt{2}^{\,n}\cos\frac{n\pi}{4}\quad\text{und}\quad\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}=\sqrt{2}^{\,n}\sin\frac{n\pi}{4}$$

ergibt.