Aufgabe 5.56

Bestimmen Sie die Polardarstellungen der komplexen Zahlen $z_1=-1+\mathrm{i}$, $z_2=\sqrt{27}+3\mathrm{i}$ und $z_3=36$ und berechnen Sie mit ihrer Hilfe $\dfrac{z_1^{10}z_2^4}{z_3^2}$! Geben Sie das Ergebnis auch in algebraischer Darstellung an!

Lösung:

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$|z_2|=\sqrt{27+9}=6,\quad \varphi=\arctan\frac{3}{\sqrt{27}}=\arctan\frac{3}{3\sqrt{3}}=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}\ \text{(da I. Quadrant)}$$

$$z_2=6\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_3=36\,(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$$

$$\frac{z_1^{10}z_2^4}{z_3^2}=\frac{\sqrt{2}^{10}\left(\cos\frac{30\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{30\pi}{4}\right)\,6^4\left(\cos\frac{4\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{6}\right)}{36^2}=2^5\left(\cos\frac{45+4}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{45+4}{6}\pi\right)$$

$$=32\left(\cos\frac{49\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{49\pi}{6}\right)=32\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=32\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=16\sqrt{3}+16\,\mathrm{i}$$