

Aufgabe 5.54

Geben Sie die Zahlen

$$\text{a) } \frac{(3+2i)(8-20i)+40+72i}{(5-2i)^2-(1-12i)}, \quad \text{b) } \frac{(i-\sqrt{3})^{400}}{128^{57}}$$

jeweils in algebraischer und in Polardarstellung an!

Hinweis: Führen Sie die Rechnung zunächst in der für die jeweilige Aufgabe zweckmäßigeren Darstellung aus und rechnen Sie das Ergebnis in die andere Darstellung um!

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{(3+2i)(8-20i)+40+72i}{(5-2i)^2-(1-12i)} &= \frac{24-44i+40+40+72i}{25-20i-4-1+12i} = \frac{104+28i}{20-8i} = \frac{(26+7i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} \\ &= \frac{116+87i}{29} = \underline{\underline{4+3i}}, \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{4^2+3^2} = 5, \quad \varphi = \arctan \frac{3}{4} \approx 36,87^\circ \text{ (da I. Quadr.)}, \quad \underline{\underline{4+3i \approx 5(\cos 36,87^\circ + i \sin 36,87^\circ)}}$$

$$\text{b) } |i-\sqrt{3}| = \sqrt{3+1} = 2, \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \text{ (da II. Quadrant),}$$

$$i-\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right), \quad \frac{(i-\sqrt{3})^{400}}{128^{57}} = \frac{(2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}))^{400}}{(2^7)^{57}} =$$

$$\frac{2^{400}(\cos \frac{2000\pi}{6} + i \sin \frac{2000\pi}{6})}{2^{399}} = \underline{\underline{2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})}} = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) = \underline{\underline{-1-\sqrt{3}i}}$$

$$\text{(da } \frac{2000\pi}{6} = \frac{1000\pi}{3} = 332\pi + \frac{4\pi}{3}\text{)}$$