

Aufgabe 5.49

Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung $(1 - i\sqrt{3})z = \frac{12}{3 + i\sqrt{3}}$, geben Sie diese in algebraischer und in Polardarstellung an! Berechnen Sie außerdem die sechste Potenz dieser Lösung!

Lösung:

$$\begin{aligned} z &= \frac{12}{(3 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)} = \frac{12}{3 - 3\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 3} = \frac{12}{6 - 2\sqrt{3}i} = \frac{6}{3 - \sqrt{3}i} = \frac{6(3 + \sqrt{3}i)}{(3 - \sqrt{3}i)(3 + \sqrt{3}i)} \\ &= \frac{6(3 + \sqrt{3}i)}{12} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (\text{algebraische Darstellung}) \end{aligned}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}, \quad \varphi = \arctan \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \quad (\text{da I. Quadrant})$$

$$z = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad (\text{Polardarstellung})$$

$$z^6 = \left(\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right)^6 = \sqrt{3}^6 \left(\cos \frac{6\pi}{6} + i \sin \frac{6\pi}{6} \right) = 3^3 (\cos \pi + i \sin \pi) = 27 \cdot (-1) = -27$$