

Aufgabe 5.43

Geben Sie die Gleichung der Geraden $y = x - 1$ in Polarkoordinaten in der Form $r = r(\varphi)$ an und ermitteln Sie den Definitionsbereich dieser Funktion!

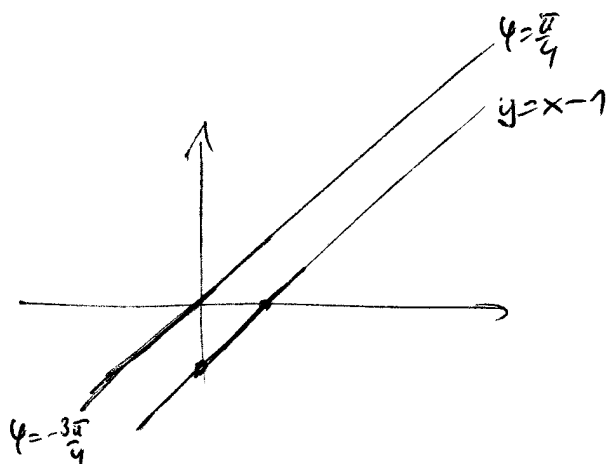
Lösung:

$$y = r \sin \varphi, \quad x = r \cos \varphi$$

Einsetzen in $y = x - 1$ ergibt $r \sin \varphi = r \cos \varphi - 1$, $r(\cos \varphi - \sin \varphi) = 1$,

$$r = \frac{1}{\cos \varphi - \sin \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}(\cos \varphi \cos \frac{\pi}{2} - \sin \varphi \sin \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos(\varphi + \frac{\pi}{4})}.$$

Division durch 0 kann dabei nicht auftreten, da dafür $\cos \varphi = \sin \varphi$ sein müsste, was nur für $\pi/4$ und $-3\pi/4$ der Fall ist. Dies entspricht aber gerade der Richtung der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten, die parallel zu $y = x - 1$ ist, so dass in diese Richtung keine Punkte der Gerade erreicht werden. Da die Gerade rechts unterhalb dieser Winkelhalbierenden liegt, muss $-3\pi/4 < \varphi < \pi/4$ sein.



Somit ist $r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2} \cos(\varphi + \frac{\pi}{4})}$ mit dem Definitionsbereich $-\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$.