Aufgabe 5.26

Zeigen Sie, das zwei komplexe Zahlen a und b genau dann beide reell oder zueinander konjugiert sind, wenn sowohl $a+b$ als auch $a \cdot b$ reelle Zahlen sind!

Lösung:

Wenn $(a_1+a_2\mathrm{i})+(b_1+b_2\mathrm{i})$ und $(a_1+a_2\mathrm{i})(b_1+b_2\mathrm{i})$ reell sind, so gilt $a_2+b_2=0$ und $a_1b_2+a_2b_1=0$. Für $a_2=0$ folgt $b_2=0$, d.h. a und b sind reell. Für $a_2\neq 0$ folgt $b_2=-a_2$ und damit $b_1=a_1$, d.h. a und b sind konjugiert komplex. Also folgt aus $a+b, ab\in\mathbb{R}$, das a und b beide reell oder zueinander konjugiert sind.

Die Umkehrung ist offensichtlich, insbesondere dann, wenn a und b beide reell sind. Auch im konjugiert komplexen Fall ist sofort zu sehen, dass sowohl $(a_1+a_2\mathrm{i})+(a_1-a_2\mathrm{i})=2a_1$ als auch $(a_1+a_2\mathrm{i})(a_1-a_2\mathrm{i})=a_1^2+a_2^2$ reelle Zahlen sind.