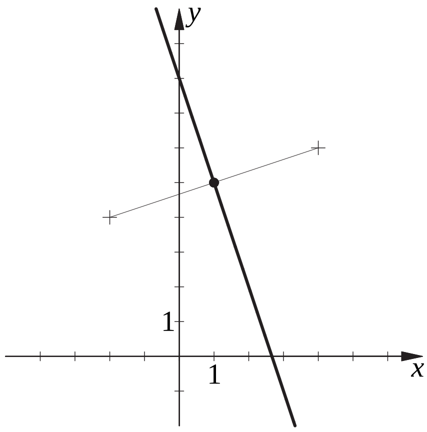
Aufgabe 5.19

Sei $z=x+\mathrm{i}y$. Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $|z-4-6\mathrm{i}|=|z+2-4\mathrm{i}|$ eine Gerade beschrieben wird und bestimmen Sie ihre Gleichung in der Form $y=mx+n$! Lösen Sie diese Aufgabe unabhängig voneinander

a) auf geometrischem Wege unter entsprechender Interpretation der Beträge und
b) rechnerisch durch Einsetzen von $z=x+\mathrm{i}y$ in die Gleichung!

Lösung:



a) $|z_1-z_2|$ ist der Abstand zwischen den Punkten z_1 und z_2. Also beschreibt die gegebene Gleichung $|z-(4+6\mathrm{i})|=|z-(-2+4\mathrm{i})|$ die Menge aller Punkte z, die von den Punkten $4+6\mathrm{i}$ und $-2+4\mathrm{i}$, d.h. von $(4,6)$ und $(-2,4)$, gleich weit entfernt sind. Dabei handelt es sich um die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten.

Als Mittelpunkt der Verbindungsstrecke ergibt sich wegen $\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ der Punkt $(1,5)$.

Anstieg der Verbindungsstrecke ist $\dfrac{6-4}{4-(-2)}=\dfrac{1}{3}$. Ist der Anstiegswinkel α, so gilt also $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$. Die dazu orthogonale Mittelsenkrechte hat den Anstiegswinkel $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ und damit, da der Tangens eine ungerade und π-periodische Funktion ist, den Anstieg $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\left(-\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cot\alpha=-\dfrac{1}{\tan\alpha}=-3$.

Somit ist $m=-3$. Da der Punkt $(1,5)$ auf der gesuchten Gerade liegt, gilt $5=-3\cdot 1+n$, also $n=8$, so dass die gesuchte Gerade die Gleichung $y=-3x+8$ hat.

b) Einsetzen von $z=x+\mathrm{i}y$ ergibt $|(x-4)+(y-6)\,\mathrm{i}|=|(x+2)+(y-4)\,\mathrm{i}|$, d.h. $\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}$. Durch Quadrieren erhält man $(x-4)^2+(y-6)^2=(x+2)^2+(y-4)^2$, d.h. $x^2-8x+16+y^2-12y+36=x^2+4x+4+y^2-8y+16$, $-12x-4y+32=0$ und schließlich die gesuchte Geradengleichung $y=-3x+8$.