Aufgabe 5.16

Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und es gelte $|z+1| \geq 2|z-1|$.

a) Beschreiben Sie den mit der Ungleichung ausgedrückten Sachverhalt verbal!

b) Geben Sie eine Ungleichung an, die den Zusammenhang zwischen dem Realteil x und dem Imaginärteil y beschreibt!

Hinweis: Bringen Sie eine Seite der Ungleichung in die Form $(x-a)^2+(y-b)^2$!

c) Skizzieren Sie die Lösungsmenge der Ungleichung!

Lösung:

a) Mit der Ungleichung wird die Menge aller Punkte der komplexen Zahlenebene beschrieben, die vom Punkt -1 mindestens doppelt so weit entfernt sind wie vom Punkt 1.

b)
$$\begin{aligned} |(x+1)+\mathrm{i}y| \geq 2|(x-1)+\mathrm{i}y| &\iff \sqrt{(x+1)^2+y^2} \geq 2\sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ &\iff (x+1)^2+y^2 \geq 4\left((x-1)^2+y^2\right) \\ &\iff x^2+2x+1+y^2 \geq 4x^2-8x+4+4y^2 \end{aligned}$$

$$0 \geq 3x^2-10x+3y^2+3 \iff 0 \geq x^2-\frac{10}{3}x+y^2+1 \iff 0 \geq \left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}+y^2+1$$

Somit ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2 \leq \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$.

c) Die Ungleichung beschreibt in der x–y–Ebene die Kreisfläche mit Radius $\frac{4}{3}$ um den Punkt $(\frac{5}{3},0)$, in der komplexen Zahlenebene ist das die Kreisfläche mit Radius $\frac{4}{3}$ um dem Punkt $\frac{5}{3}$. Auf dem Rand der Kreisfläche liegen insbesondere die Punkte $z=\frac{1}{3}$ und $z=3$, für die der in a) beschriebene Sachverhalt offensichtlich erfüllt ist.