Aufgabe 5.15

Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und es gelte $|z| \leq \sqrt{|\mathrm{Re}(z)|}$.

a) Beschreiben Sie den Sachverhalt durch eine reelle Ungleichung für x und y !

b) Skizzieren Sie $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{|\mathrm{Re}(z)|}\}$!

Hinweis zu b): quadratische Ergänzung

Lösung:

a) Setzt man die Darstellung von z in die Ungleichung ein, so ergibt sich:

$$|x+\mathrm{i}y| \leq \sqrt{|\mathrm{Re}(x+\mathrm{i}y)|} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{|x|} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+y^2 \leq |x|.$$

b) Zum Auflösen des Betrages führen wir eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $x \geq 0$ Betragszeichen werden weggelassen. Erhalten

$$x^2+y^2 \leq x \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Dies entspricht einer Kreisfläche mit Mittelpunkt $(1/2, 0)$ und Radius $1/2$ einschließlich Rand. Ihre Punkte haben alle eine nichtnegative x-Koordinate, so dass sie vollständig zur gesuchten Menge gehört.

2. Fall: $x < 0$ Betragszeichen durch Multiplikation mit -1 ersetzen. Erhalten

$$x^2+y^2 \leq -x \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Dies entspricht einer Kreisfläche mit Mittelpunkt $(-1/2, 0)$ und Radius $1/2$ einschließlich Rand. Ihre Punkte haben alle eine negative x-Koordinate, so dass sie vollständig zur gesuchten Menge gehört (bis auf $(0,0)$, dieser Punkt ist aber schon im anderen Kreis enthalten).

Damit ergibt sich folgendes Bild: