Aufgabe 5.14

Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und es gelte $|z| \le 1 - \mathrm{Re}(z)$.

a) Geben Sie eine Ungleichung an, die den Zusammenhang zwischen dem Realteil x und dem Imaginärteil y beschreibt!

b) Skizzieren Sie $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1 - \mathrm{Re}(z)\}$!

Lösung:

a) $z = x + \mathrm{i}y,\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \mathrm{Re}(z) = x,$ d.h. $\sqrt{x^2+y^2} \le 1 - x$.

b) Aus $\sqrt{x^2+y^2} \le 1 - x$ folgt zunächst, dass $1 - x \ge 0$ und damit $x \le 1$ sein muss. Ist dies der Fall, so ist die Ungleichung äquivalent zu

$$x^2 + y^2 \le 1 - 2x + x^2 \iff y^2 \le 1 - 2x \iff x \le -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Ist die zuletzt notierte Ungleichung erfüllt, so ist $x \le 1$ automatisch erfüllt. Die Lösungsmenge kann also durch $\{z \in \mathbb{C} :\ z = x + \mathrm{i}y,\ x \le -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\}$ beschrieben werden.