Aufgabe 5.8

Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen!

Lösung:

Zu beweisen ist die **Dreiecksungleichung** $|(a+c)+(b+d)\mathrm{i}| \leq |a+b\mathrm{i}|+|c+d\mathrm{i}|$. Da beide Seiten nichtnegativ sind, ist dies äquivalent zu $|(a+c)+(b+d)\mathrm{i}|^2 \leq (|a+b\mathrm{i}|+|c+d\mathrm{i}|)^2$.

$$|(a+c)+(b+d)\mathrm{i}|^2 = (a+c)^2+(b+d)^2 = a^2+c^2+2ac+b^2+d^2+2bd = a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd$$

$$(|a+b\mathrm{i}|+|c+d\mathrm{i}|)^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\,\right)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

Es reicht also zu zeigen, dass $ac+bd \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ gilt bzw. äquivalent dazu, dass $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$. Ausmultiplizieren dieser Beziehung ergibt

$$a^2c^2+b^2d^2+2abcd \leq a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \iff 2abcd \leq a^2d^2+b^2c^2 \iff 0 \leq (ad-bc)^2.$$

Letztere Beziehung ist offensichtlich richtig, so dass die Dreiecksungleichung bewiesen ist.

Bei der Beziehung $|ac+bd| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ handelt es sich um die

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right| \leq \left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right\|$.