Aufgabe 5.6

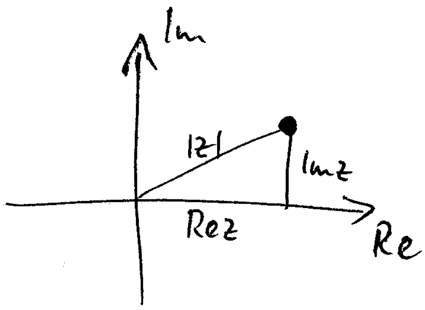
Welche komplexen Zahlen z erfüllen die Bedingung $|z| = |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z|$?

Lösung:

Sei $z = x + y\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|z| = |x| + |y| \iff |z|^2 = (|x| + |y|)^2 \iff x^2 + y^2 = x^2 + 2|x|\,|y| + y^2 \iff |x|\,|y| = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$$

Die Gleichung ist also genau dann erfüllt, wenn z auf der reellen Achse ($y = 0$) oder auf der imaginären Achse ($x = 0$) liegt.



Man kann auch geometrisch damit argumentieren, dass die Dreiecksungleichung $c \leq a + b$ für die Seitenlängen a, b und c eines Dreiecks nur dann mit dem Gleichheitszeichen erfüllt sein kann, wenn die drei Punkte des Dreiecks auf einer Geraden liegen. Somit kann die gegebene Gleichung nur richtig sein, wenn z auf einer der Koordinatenachsen liegt. Ist Letzteres der Fall, so ist die Gleichung aber offensichtlich auch erfüllt.