Aufgabe 4.26

Lösen Sie die Ungleichung $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$!

Lösung:

Damit alle Wurzeln definiert sind, muss zunächst $x \geq 2$ gelten.

$$\begin{array}{rrcl} & \sqrt{x+3} & < & \sqrt{x-1}+\sqrt{x-2} \\ \underset{(\text{da beide Seiten} \geq 0)}{\Longleftrightarrow} & x+3 & < & x-1+2\sqrt{x^2-3x+2}+x-2 \\ \Longleftrightarrow & 6-x & < & 2\sqrt{x^2-3x+2} \end{array}$$

Nun müssen für das Quadrieren 2 Fälle unterschieden werden:

$\underline{6-x<0 \iff x>6:}$ Die linke Seite der Ungleichung ist negativ, so dass die Ungleichung automatisch erfüllt ist. Alle $x>6$ gehören zur Lösung.

$\underline{6-x \geq 0 \iff x \leq 6:}$ Dann liefert das Quadrieren der Ungleichung äquivalent

$36-12x+x^2 < 4x^2-12x+8,\ \ 28 < 3x^2,\ \ |x| > \sqrt{\frac{28}{3}} \approx 3.055$. Wegen $x \geq 2$ und $x \leq 6$ gehören davon aber nur $\sqrt{\frac{28}{3}} < x \leq 6$ zur Lösung.

Lösungsmenge ist also $\left(\sqrt{\frac{28}{3}}\,,6\right] \cup (6\,,\infty) = \left(\sqrt{\frac{28}{3}}\,,\infty\right)$.