Aufgabe 4.21

Für welche reellen x sind folgende Ungleichungen erfüllt:

a) $|3x-2|+|3-2x| \geq 2$, b) $\dfrac{1}{3x-2}+\dfrac{1}{3-2x} \geq 2$?

Lösung:

a) $|3x-2| = \begin{cases} 3x-2, & x \geq 2/3 \\ 2-3x, & x < 2/3 \end{cases}$, $|3-2x| = \begin{cases} 3-2x, & x \leq 3/2 \\ 2x-3, & x > 3/2 \end{cases}$

Also sind 3 Fälle zu unterscheiden: Beitrag zur Lösung

				Beitrag zur Lösung
$x < \frac{2}{3}$:	$2-3x+3-2x \geq 2$,	$3 \geq 5x$,	$\frac{3}{5} \geq x$,	$x \leq \frac{3}{5}$
$\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$:	$3x-2+3-2x \geq 2$,	$x \geq 1$,	$x \geq 1$,	$1 \leq x \leq \frac{3}{2}$
$\frac{3}{2} < x$:	$3x-2+2x-3 \geq 2$,	$5x \geq 7$,	$x \geq \frac{7}{5}$,	$\frac{3}{2} < x$

Zusammenfassung der Beiträge der 3 Fälle zur Lösung: $\underline{\underline{x \leq \frac{3}{5} \text{ und } x \geq 1}}$

b) $$\frac{1}{3x-2}+\frac{1}{3-2x} = \frac{3-2x+3x-2}{(3x-2)(2-3x)} = \frac{x+1}{-6x^2+13x-6} \geq 2$$

Für $x = \frac{2}{3}$ und $x = \frac{3}{2}$ ist die linke Seite nicht definiert. Ansonsten ist bei der Multiplikation der Ungleichung mit dem Nenner dessen Vorzeichen zu beachten. Er ist positiv, wenn beide Faktoren positiv sind (d.h. für $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$) oder wenn beide Faktoren negativ sind (nicht möglich, da dann gleichzeitig $x < \frac{2}{3}$ und $x > \frac{3}{2}$ sein müsste). Er ist negativ, wenn die Faktoren unterschiedliches Vorzeichen haben, also für $x < \frac{2}{3}$ und für $x > \frac{3}{2}$.

Fall A: $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$: $x+1 \geq -12x^2+26x-12$, $x^2 - \frac{25}{12}x + \frac{13}{12} \geq 0$

Fall B: $x < \frac{2}{3}$ oder $x > \frac{3}{2}$: $x+1 \leq -12x^2+26x-12$, $x^2 - \frac{25}{12}x + \frac{13}{12} \leq 0$

Die Parabel $x^2 - \frac{25}{12}x + \frac{13}{12}$ hat die Nullstellen $\frac{25}{24} \pm \sqrt{\frac{625}{576} - \frac{624}{576}} = 1; \frac{26}{24}$ und ist nach oben offen, also gilt $x^2 - \frac{25}{12}x + \frac{13}{12} \leq 0$ genau dann, wenn $1 \leq x \leq \frac{13}{12}$ ist. Da dieses Intervall komplett im Intervall $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$ liegt, ist die Ungleichung im Fall A für $\frac{2}{3} < x \leq 1$ und für $\frac{13}{12} \leq x < \frac{3}{2}$ erfüllt, während sie im Fall B für kein x erfüllt ist.

Lösung also: $\underline{\underline{\frac{2}{3} < x \leq 1 \text{ und } \frac{13}{12} \leq x < \frac{3}{2}}}$