Aufgabe 4.20

Für welche reellen x sind folgende Ungleichungen erfüllt:

a) $\dfrac{x^2+6x-67}{x+5} \geq 2,$ b) $|x+4|+|9-5x| \leq 7,$ c) $\dfrac{1}{|x-3|}+\dfrac{1}{x+3} \geq 6$?

Lösung:

a) Fall $\underline{x>-5:}$ $x+5\geq 0,\ \ x^2+6x-67\geq 2x+10,\ x^2+4x-77\geq 0,\ x_{1/2}=-2\pm\sqrt{4+77}=7;-11,$
d.h. letztere Ungleichung erfüllt für $x\leq -11$ und $x\geq 7$, Beitrag zur Lösung: $x\geq 7$

Fall $\underline{x=-5:}$ linke Seite nicht definiert

Fall $\underline{x<-5:}$ $x+5\leq 0,\ \ x^2+6x-67\leq 2x+10,\ x^2+4x-77\leq 0,$
letztere Ungleichung erfüllt für $-11\leq x\leq 7$, Beitrag zur Lösung: $-11\leq x<-5$

Lösung: $\{x\in\mathbb{R}:\ -11\leq x<-5\}\cup\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq 7\}=[-11,-5)\cup[7,\infty)$

b) $x<-4:\quad -x-4+9-5x\leq 7,\ -6x\leq 2,\quad x\geq -\dfrac{1}{3},$ Beitrag zur Lösung: $\emptyset$

$-4\leq x<\dfrac{9}{5}:\quad x+4+9-5x\leq 7,\ -4x\leq -6,\ x\geq\dfrac{3}{2},\qquad \dfrac{3}{2}\leq x<\dfrac{9}{5}$

$\dfrac{9}{5}\leq x:\quad x+4+5x-9\leq 7,\quad 6x\leq 12,\quad x\leq 2,\qquad \dfrac{9}{5}\leq x\leq 2$

Lösung: $\{x\in\mathbb{R}:\ \dfrac{3}{2}\leq x\leq 2\}=\left[\dfrac{3}{2},2\right]$

c) Beitrag zur Lösung

$x<-3:\ \dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{x+3}\geq 6,\ \dfrac{6}{9-x^2}\geq 6,\ 1\leq 9-x^2,\ x^2\leq 8,\ |x|\leq 2\sqrt{2},\qquad \emptyset$

$x=-3:$ nicht definiert

$-3<x<3:\ \dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{x+3}\geq 6,\ \dfrac{6}{9-x^2}\geq 6,\ 1\geq 9-x^2,\ x^2\geq 8,\ |x|\geq 2\sqrt{2},\qquad -3<x\leq -2\sqrt{2},$
$2\sqrt{2}\leq x<3$

$x=3:$ nicht definiert

$3<x:\ \dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}\geq 6,\ \dfrac{2x}{x^2-9}\geq 6,\ x\geq 3x^2-27,\ x^2-\dfrac{x}{3}-9\leq 0,$
$x_{1/2}=\dfrac{1\pm\sqrt{325}}{6}$, d.h. $\dfrac{1-\sqrt{325}}{6}\leq x\leq\dfrac{1+\sqrt{325}}{6},\qquad 3<x\leq\dfrac{1+\sqrt{325}}{6}$

Lösung: $\left(-3,-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2},3\right)\cup\left(3,\dfrac{1+5\sqrt{13}}{6}\right]\qquad\left(2\sqrt{2}\approx 2.828,\ \dfrac{1+5\sqrt{13}}{6}\approx 3.171\right)$