Aufgabe 4.19

Für welche reellen x sind folgende Ungleichungen erfüllt:

a) $\dfrac{x+2}{x^2+8x-9} \le \dfrac{1}{8}$, b) $|8-x|+|2x+3| \le 14$, c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x-3} \le 4$?

Lösung:

a) Es gilt $x^2+8x-9=0$ für $x_{1/2}=-4\pm\sqrt{16+9}=-9;1$,

also $x^2+8x-9=(x+9)(x-1)=\begin{cases} >0, & x<-9 \vee x>1 \\ =0, & x=-9 \vee x=1 \\ <0, & -9<x<1 \end{cases}$.

$x<-9 \vee x>1$: $8x+16\le x^2+8x-9$, $x^2-25\ge 0$, $|x|\ge 5$, Beitrag zur Lsg.: $x<-9$ und $x\ge 5$
$x=-9 \vee x=1$: linke Seite der Ungleichung nicht definiert
$-9<x<1$: $8x+16\ge x^2+8x-9$, $x^2-25\le 0$, $|x|\le 5$, Beitrag zur Lsg.: $-5\le x<1$

Lösung: $(-\infty,-9)\cup[-5,1)\cup[5,\infty)$

b) $x<-\frac{3}{2}$: $8-x-2x-3\le 14$, $-3x+5\le 14$, $x\ge -3$, Beitrag zur Lsg.: $-3\le x<-\frac{3}{2}$
$-\frac{3}{2}\le x<8$: $8-x+2x+3\le 14$, $x+11\le 14$, $x\le 3$, $-\frac{3}{2}\le x\le 3$
$8\le x$: $x-8+2x+3\le 14$, $3x-5\le 14$, $x\le\frac{19}{3}$, $\emptyset$

Lösung: $[-3,3]$

c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{x-3-5x}{x(x-3)}=\dfrac{-4x-3}{x^2-3x}\le 4$, $x^2-3x=x(x-3)=\begin{cases} >0, & x<0 \vee x>3 \\ =0, & x=0 \vee x=3 \\ <0, & 0<x<3 \end{cases}$

$x<0 \vee x>3$: $-4x-3\le 4x^2-12x$, $4x^2-8x+3\ge 0$, $x^2-2x+\frac{3}{4}\ge 0$, $x\le\frac{1}{2} \vee x\ge\frac{3}{2}$
$x=0 \vee x=3$: linke Seite der Ungleichung nicht definiert
$0<x<3$: $-4x-3\ge 4x^2-12x$, $4x^2-8x+3\le 0$, $x^2-2x+\frac{3}{4}\le 0$, $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

Im oberen Fall ist die Bedingung $x\le\frac{1}{2} \vee x\ge\frac{3}{2}$ für alle x, die zu dem Fall gehören, erfüllt, also gehören alle x mit $x<0 \vee x>3$ zur Lösung. Im unteren Fall gehören allerdings nur die x mit $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$ zur Lösung.

Insgesamt ergibt sich damit als Lösung: $(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\cup(3,\infty)$.