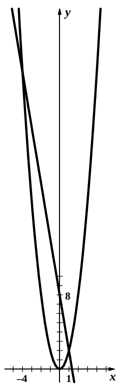
Aufgabe 4.15

Ermitteln Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen, das heißt die Menge aller reellen Zahlen x, für die gilt:

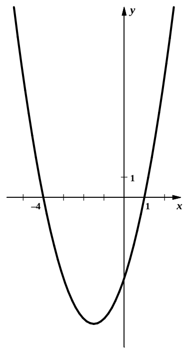
a) $2x^2 < 8-6x$, b) $x^4+3x^3-4x > 0$, c) $\dfrac{2x+4}{5x-7} > 3$, d) $\dfrac{x+2}{x^2-x-2} < -1$!

Lösung:

a) 

Funktionen $y=2x^2$ und $y=8-6x$ ($x{=}0 \Rightarrow y{=}8,\ \ y{=}0 \Rightarrow x{=}\frac{4}{3}$) zeichnen, Schnittpunkte ermitteln:
$2x^2 < 8-6x$ gilt für $-4<x<1$ (rechnerisch s. unten)

oder



$2x^2+6x-8<0 \ \Leftrightarrow\ x^2+3x-4<0$,
Nullstellenbestimmung von $x^2+3x-4=0$:

$$x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} -4 \\ \ \ 1 \end{cases}$$

Lösung also $-4<x<1$

oder

Faktorisierung von x^2+3x-4 (führender Koeffizient 1): $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$,
also $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$, $2x^2+6x-8=2(x+4)(x-1)<0$, falls die Faktoren $x+4$ und $x-1$ entgegengesetztes Vorzeichen haben.

$$\text{Es gilt}\quad x+4\begin{cases} <0, & x<-4 \\ =0, & x=-4 \\ >0, & x>-4 \end{cases}, \qquad x-1\begin{cases} <0, & x<1 \\ =0, & x=1 \\ >0, & x>1 \end{cases},$$

entgegengesetztes Vorzeichen für $-4<x<1$.
Lösungsmenge also $\{x\in\mathbb{R}:\ -4<x<1\}=(-4,1)$ (offenes Intervall).

b) Faktorisierung des Polynoms: $x^4+3x^3-4x = x(x^3+3x-4)$, Nullstellen offenbar $x_1=0$ (entspricht Faktor x) und $x_2=1$, d.h. $x^3{+}3x^2{-}4$ enthält Faktor $x{-}1$.

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & +3x^2 & & -4) : (x-1) = x^2+4x+4\ ,\quad x_{3/4} = -2\pm\sqrt{4-4} = -2 \\
\underline{x^3} & \underline{-\ x^2} & & \\
 & 4x^2 & & -4 \\
 & \underline{4x^2} & \underline{-4x} & \\
 & & 4x & -4 \\
 & & \underline{4x} & \underline{-4} \\
 & & & \ \ 0
\end{array}$$

$x^4+3x^3-4x=x(x-1)(x+2)^2$. Der letzte Faktor ist $=0$ für $x{=}{-2}$, sonst immer >0. Für $x{=}{-2}$ ist das Polynom gleich 0, sonst hängt das Vorzeichen von $x(x{-}1)$ ab, diese Faktoren haben gleiches Vorzeichen für $x<0$ und $x>1$.

Lösungsmenge also $\{x{\in}\mathbb{R}: x{<}{-2} \vee -2{<}x{<}0 \vee 1{<}x\} = (-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(1,\infty)$.

c)

Nenner	Fall		Beitrag zur Lösung
$5x-7>0:$	$x>\frac{7}{5}:$	$2x+4>15x-21,\quad 25>13x,\quad x<\frac{25}{13},$	$\frac{7}{5}<x<\frac{25}{13}$
$5x-7=0:$	$x=\frac{7}{5}:$	nicht definiert	
$5x-7<0:$	$x<\frac{7}{5}:$	$2x+4<15x-21,\quad 25<13x,\quad x>\frac{25}{13},$	Widerspruch zu $x<\frac{7}{5}$

Lösungsmenge ist also $\left\{x\in\mathbb{R}:\ \dfrac{7}{5}<x<\dfrac{25}{13}\right\}=\left(\dfrac{7}{5},\dfrac{25}{13}\right)$.

d) Nullstellen des Nenners: $x^2-x-2=0,\ \ x_{1/2}=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{8}{4}}=\dfrac{1}{20}\pm\dfrac{3}{2}=\begin{cases}-1\\ \ \ 2\end{cases}$

$x^2-2x-2=(x+1)(x-2)$

Nenner	Fall		Beitrag zur Lösung
$x^2-x-2>0:$	$x<-1\vee x>2:$	$x+2<-x^2+x+2,\quad x^2<0,$	$\varnothing$
$x^2-x-2=0:$	$x=-1\vee x=2:$	nicht definiert	
$x^2-x-2<0:$	$-1<x<2:$	$x+2>-x^2+x+2,\quad x^2>0,\quad x\neq 0,$	$(-1,0)\cup(0,2)$

Lösungsmenge ist also $\{x\in\mathbb{R}:\ -1<x<0\vee 0<x<2\}=(-1,0)\cup(0,2)$.