Aufgabe 4.13

Lösen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen

a) $x^2-6x+9>1$, b) $|x+1|+|x+2|\le 2$ und c) $\dfrac{|x+3|}{6-x}>\dfrac{1}{2}$!

Lösung:

a) $x^2-6x+9>1 \iff x^2-6x+8>0,\ x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=4,\ 2,$
$x^2-6x+8=(x-4)(x-2)>0$ falls $x-4>0 \wedge x-2>0 \Rightarrow x>4$
oder $x-4<0 \wedge x-2<0 \Rightarrow x<2$

Lösung: $\{x\in\mathbb{R}:\ x<2 \vee x>4\}=(-\infty,2)\cup(4,\infty)$

b) Fallunterscheidung — Beitrag zur Lösung

$x<-2:$	$-x-1-x-2\le 2,$	$-5\le 2x,\ x\ge -\frac{5}{2}$	$\left[-\frac{5}{2},-2\right)$
$-2\le x<-1:$	$-x-1+x+2\le 2,$	$-1\le 2,$ gilt immer	$\left[-2,-1\right)$
$-1\le x:$	$x+1+x+2\le 2,$	$2x\le -1,\ x\le -\frac{1}{2}$	$\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

Lösung: $\left\{x\in\mathbb{R}:\ -\frac{5}{2}<x<-\frac{1}{2}\right\}=\left[-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right]$

c) Wir unterscheiden vier Fälle:

(I) $\underline{x>6}$: Betragszeichen können weggelassen werden, da das Argument positiv ist. Nach Multiplikation mit $2(6-x)$ ergibt sich $2x+6<6-x$ (Relationszeichen dreht sich um, da Multiplikation mit negativer Größe erfolgt.) und damit $x<0$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $x>6$ des Falls ist.

(II) $\underline{x=6}$: Der gegebene Ausdruck ist wegen Division durch 0 nicht definiert.

(III) $\underline{-3\le x<6}$: Betragszeichen können weggelassen werden, da das Argument nichtnegativ ist. Nach Multiplikation mit $2(6-x)$ ergibt sich $2x+6>6-x$ (Relationszeichen bleibt erhalten, da Multiplikation mit positiver Größe erfolgt.) und damit $x>0$. Für diesen Fall gehören somit die x mit $0<x<6$ zur Lösung.

(IV) $\underline{x<-3}$: Beim Auflösen des Betrages muss das Argument mit -1 multipliziert werden, da es negativ ist. Nach Multiplikation mit $2(6-x)$ ergibt sich hier $-2x-6>6-x$ (Relationszeichen bleibt erhalten, da Multiplikation mit positiver Größe erfolgt.) und damit $-12>x$. Für diese x ist auch die Voraussetzung des Falles $x<-3$ erfüllt.

Lösung somit: $\{x\in\mathbb{R}:\ x<-12 \vee 0<x<6\}=(-\infty,-12)\cup(0,6)$.