Aufgabe 3.21

Seien k und n natürliche Zahlen mit $k \leq n$. Wie viele k-elementige Teilmengen hat eine n-elementige Menge?

Lösung:

k Elemente aus n Elementen auswählen, Reihenfolge spielt keine Rolle

1. Element: n Möglichkeiten, $\qquad n$
2. Element: $(n-1)$ Möglichkeiten, jede Kombination 2x erfasst: $\begin{matrix} a & b, \\ b & a \end{matrix} \qquad \dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}$
3. Element: $(n-2)$ Möglichkeiten, jede Kombination 3x erfasst: $\begin{matrix} a & b & c, \\ a & c & b, \\ b & c & a \end{matrix} \qquad \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$
4. Element: $(n-3)$ Möglichkeiten, jede Kombination 4x erfasst: $\begin{matrix} a & b & c & d, \\ a & b & d & c, \\ a & c & d & b, \\ b & c & d & a \end{matrix} \qquad \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$

usw.

Insgesamt gibt es also $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen.

(Anzahl der „Kombinationen“, Beispiel: Zahl der möglichen Lottotipps)