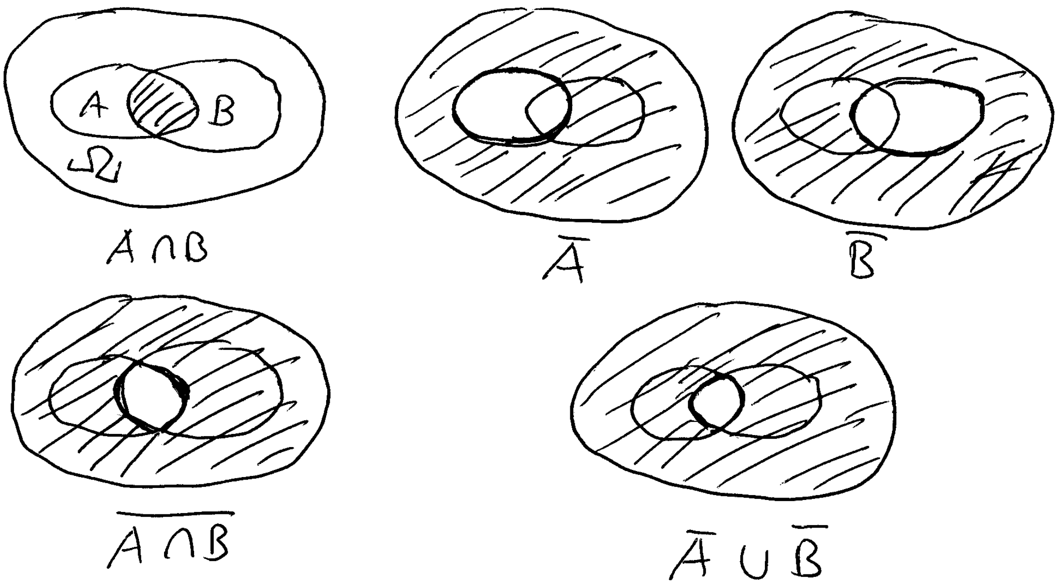
Aufgabe 3.10

Sei $\overline{A}=\Omega\backslash A$ die Komplementärmenge der Menge A bezüglich der Obermenge Ω. Beweisen Sie $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$!

Lösung:

Venn–Diagramm:



Anschaulich klar: $\overline{A\cap B}$ enthält die Elemente, die nicht gleichzeitig zu A und B gehören, d.h. solche, die nicht zu A oder nicht zu B gehören, das ist $\overline{A}\cup\overline{B}$.

Beweis durch Rückführung de Morgansche Regeln der Aussagenlogik:

Sei $x\in\Omega$. Dann gilt $x\in\overline{A\cap B} \iff x\notin A\cap B \iff \neg(x\in A\cap B) \iff \neg((x\in A)\wedge(x\in B)) \iff \neg(x\in A)\vee\neg(x\in B) \iff (x\notin A)\vee(x\notin B) \iff (x\in\overline{A})\vee(x\in\overline{B}) \iff x\in\overline{A}\cup\overline{B}$.

Da zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie die gleichen Elemente haben, folgt $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, qed.

Beweis mit Wahrheitswerttabelle: Sei $x\in\Omega$:

$x\in A$	$x\in B$	$x\in A\cap B$	$x\in\overline{A\cap B}$	$x\in\overline{A}$	$x\in\overline{B}$	$x\in\overline{A}\cup\overline{B}$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w
			$=x\in\overline{A}\cup\overline{B}$			$=x\in\overline{A\cap B}$