Aufgabe 3.9

Beweisen Sie, dass die Beziehung $(A\cap C)\cup(B\cap D)\subset(A\cup B)\cap(C\cup D)$, nicht aber die Beziehung $(A\cap C)\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(C\cup D)$ für beliebige Mengen A, B, C und D gilt!

Lösung:

$x\in(A\cap C)\cup(B\cap D)\Longleftrightarrow(x\in A\wedge x\in C)\vee(x\in B\wedge x\in D)$
$\Longleftrightarrow[(x\in A\wedge x\in C)\vee x\in B]\wedge[(x\in A\wedge x\in C)\vee x\in D]$
$\Longleftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in C\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in D)\wedge(x\in C\vee x\in D)$
$\Longrightarrow$ (erst recht) $\quad(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in C\vee x\in D)$

Gegenbeispiel für Gleichheit: Sei $A=D=\{1\},\ B=C=\{2\}$, dann gilt

$$(A\cap C)\cup(B\cap D)=\emptyset,\ (A\cup B)\cap(C\cup D)=\{1,2\}.$$