Aufgabe 2.42

Beweisen Sie die Beziehung $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sin kx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$!

Lösung:

Für $n=1$ ist die Gleichung erfüllt, da wegen $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ und $2\sin^2\dfrac{x}{2} = 1-\cos x$
$\dfrac{2\sin x - \sin 2x}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2\sin x - 2\sin x\cos x}{2-2\cos x} = \sin x$ gilt.

Gilt sie für n, so gilt sie wegen
$(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x + 2(n+1)\sin(n+1)x\,(1-\cos x) =$
$(n+2)\sin(n+1)x + (n+1)\sin nx - 2(n+1)\sin(n+1)x\cos x =$
$(n+2)\sin(n+1)x + (n+1)(\sin nx\,(1-2\cos^2 x) - 2\cos nx\sin x\cos x) =$
$(n+2)\sin(n+1)x - (n+1)(\sin nx\cos 2x - \cos nx\sin 2x) =$
$(n+2)\sin(n+1)x - (n+1)\sin(n+2)x$
auch für $n+1$.

oder:

$$\begin{aligned}
4\sin^2\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n} k\sin kx &= \sum_{k=1}^{n} 2k\sin kx\,(1-\cos x) = \sum_{k=1}^{n} 2k\sin kx - k\sin(k-1)x - k\sin(k+1)x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(\sin(k+1)x - \sin kx) + \sum_{k=1}^{n} k(\sin kx - \sin(k+1)x) = \\
&= n\sin nx - n\sin(n+1)x + \sum_{k=0}^{n-1}(\sin(k+1)x - \sin kx) \\
&= (n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x
\end{aligned}$$