Aufgabe 2.41

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n^3 - n$ durch 3, die Zahl $n^5 - n$ durch 5 und die Zahl $n^7 - n$ durch 7 teilbar ist!
b) Gilt allgemein, dass für ungerade Zahlen k die Zahl $n^k - n$ durch k teilbar ist?

Lösung:

a) Offensichtlich sind die Behauptungen für $n = 0$ wahr. Wir nehmen an, dass sie für n wahr sind. Wegen
$(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + 3n^2 + 3n,$
$(n+1)^5 - (n+1) = (n^5 - n) + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n,$
$(n+1)^7 - (n+1) = (n^7 - n) + 7n^6 + 21n^5 + 35n^4 + 35n^3 + 21n^2 + 7n$
gelten sie auch für $n+1$, qed.

b) Nein, denn $2^9 - 2 = 510$ ist nicht durch 9 teilbar.