Aufgabe 2.39

Beweisen Sie die Formel $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

a) durch Umformung von $(N+1)^3 = \displaystyle\sum_{n=1}^{N+1} n^3 - \sum_{n=0}^{N} n^3 = \sum_{n=0}^{N} (n+1)^3 - \sum_{n=0}^{N} n^3$ und

b) durch vollständige Induktion!

Lösung:

a) $$(N+1)^3 = \sum_{n=1}^{N+1} n^3 - \sum_{n=0}^{N} n^3 = \sum_{n=0}^{N} (n+1)^3 - \sum_{n=0}^{N} n^3 = \sum_{n=0}^{N} \big((n^3+3n^2+3n+1) - n^3\big)$$
$$= 3\sum_{n=0}^{N} n^2 + 3\sum_{n=0}^{N} n + \sum_{n=0}^{N} 1 = 3\sum_{n=0}^{N} n^2 + 3\frac{N(N+1)}{2} + (N+1)$$

(Dabei ist die Formel aus Aufgabe 2.38 verwendet worden.)

$$\sum_{n=0}^{N} n^2 = \frac{(N+1)^3 - 3\frac{N(N+1)}{2} - (N+1)}{3} = \frac{N+1}{6}\left(2(N+1)^2 - 3N - 2\right)$$
$$= \frac{N+1}{6}(2N^2+4N+2-3N-2) = \frac{N+1}{6}(2N^2+N) = \frac{(N+1)N(2N+1)}{6}$$

b) Induktionsanfang: Behauptung für $N=1$ richtig, da $1 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$.

Induktionsschritt: Ist die Behauptung für N richtig, so gilt sie auch für $N+1$:

$$\sum_{n=1}^{N+1} n^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2 + (N+1)^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 = (N+1)\frac{N(2N+1)+6N+6}{6}$$
$$= (N+1)\frac{2N^2+7N+6}{6} = \frac{(N+1)\big((N+1)+1\big)\big(2(N+1)+1\big)}{6},$$

da $(N+2)(2N+3) = 2N^2+7N+6$.