Aufgabe 2.38

Beweisen Sie die Formel $\sum\limits_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$

a) durch Umformung von $(N+1)^2 = \sum\limits_{n=1}^{N+1} n^2 - \sum\limits_{n=0}^{N} n^2 = \sum\limits_{n=0}^{N} (n+1)^2 - \sum\limits_{n=0}^{N} n^2$ und

b) durch vollständige Induktion!

Lösung:

Gauß in der Schule:

N gerade: $\Big(1+N\Big) + \Big(2+(N-1)\Big) + \cdots + \Big(\frac{N}{2} + (\frac{N}{2}+1)\Big) = \frac{N}{2}(N+1)$

N ungerade: $\Big(1+N\Big) + \Big(2+(N-1)\Big) + \cdots + \Big(\frac{N-1}{2} + \frac{N+3}{2}\Big) + \frac{N+1}{2} = \frac{N-1}{2}(N+1) + \frac{N+1}{2} = \frac{N+1}{2}(N-1+1) = N\,\frac{N+1}{2}$

a) $$(N+1)^2 = \sum_{n=1}^{N+1} n^2 - \sum_{n=0}^{N} n^2 = \sum_{n=0}^{N} (n+1)^2 - \sum_{n=0}^{N} n^2 = \sum_{n=0}^{N} \Big((n^2+2n+1) - n^2\Big) = 2\sum_{n=0}^{N} n + \sum_{n=0}^{N} 1$$
$$= 2\sum_{n=1}^{N} n + N+1$$
$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{(N+1)^2 - (N+1)}{2} = (N+1)\,\frac{N+1-1}{2} = (N+1)\,\frac{N}{2}$$

b) Induktionsanfang: Behauptung für $N=1$ richtig, da $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$.

Induktionsschritt: Ist die Behauptung für N richtig, so gilt sie auch für $N+1$:
$$\sum_{n=1}^{N+1} n = \sum_{n=1}^{N} n + N+1 = \frac{N(N+1)}{2} + (N+1) = (N+1)\frac{N+2}{2} = \frac{(N+1)\big((N+1)+1\big)}{2}.$$