

Aufgabe 2.27

Negieren Sie die folgenden Aussagen! Schreiben Sie dabei für a) bis g) die Aussagen und ihre Negationen auch mit dem Existenz- bzw. Allquantor und geben Sie an, ob die Aussage oder ihre Negation wahr ist!

- Jede natürliche Zahl hat einen Vorgänger.
- Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.
- Es gibt keine reelle Zahl, die zugleich positiv und negativ ist.
- Es gibt keine reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist.
- Jede nichtnegative reelle Zahl ist positiv.
- Die Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ hat eine reelle Lösung.
- Jedes Viereck, das zugleich Rechteck und Drachenviereck ist, ist ein Quadrat.
- Jeder Student ist bei der Vorlesung anwesend.
- Es gibt einen Studenten, der nicht im Wohnheim wohnt.

Lösung:

Negation von \forall : „Nicht für alle gilt“ oder „Es gibt ein ..., für das nicht gilt“
 \exists : „Es gibt kein ..., für das gilt“ oder „Für alle gilt nicht“

Ausgangsaussage	Negation
a) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : m = n - 1$ falsch	$\exists n \in \mathbb{N} : \nexists m \in \mathbb{N} : m = n - 1$ wahr ($n = 1$ bzw. $n = 0$) Es gibt eine natürliche Zahl, die keinen Vorgänger hat.
b) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : m = n + 1$ wahr	$\exists n \in \mathbb{N} : \nexists m \in \mathbb{N} : m = n + 1$ falsch Es gibt eine natürliche Zahl, die keinen Nachfolger hat.
c) $\nexists x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x < 0$ wahr	$\exists x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x < 0$ falsch Es gibt eine reelle Zahl, die zugleich positiv und negativ ist.
d) $\nexists x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \geq 0$ falsch	$\exists x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \geq 0$ wahr ($x = 0$) Es gibt eine reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist.
e) $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Rightarrow x > 0$ falsch	$\exists x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge \neg(x > 0)$ wahr ($x = 0$) Es gibt eine nichtnegative reelle Zahl, die nicht positiv ist.
f) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 3 = 0$ falsch	$\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 3 = 0$ wahr ($x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$) Die Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ hat keine reelle Lösung.
g) $\forall v \in V : (v \in R \wedge v \in D) \Rightarrow v \in Q$ wahr	$\exists v \in V : v \in R \wedge v \in D \wedge v \notin Q$ falsch

Dabei sei V die Menge der Vierecke, R die der Rechtecke, D die der Drachenvierecke und Q die der Quadrate.

- a) Negation: Es gibt eine natürliche Zahl, die keinen Vorgänger hat.
Diese Negation ist wahr (Je nach Definition ist $n = 1$ bzw. $n = 0$ eine solche Zahl.).
- b) Negation: Es gibt eine natürliche Zahl, die keinen Nachfolger hat.
Dies ist falsch, die gegebene Aussage ist wahr (Mit n ist jeweils auch $n+1$ natürliche Zahl.).
- c) Negation: Es gibt eine reelle Zahl, die zugleich positiv und negativ ist.
Dies ist falsch, die gegebene Aussage ist wahr.
- d) Negation: Es gibt eine reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist.
Diese Negation ist wahr ($x = 0$ ist nämlich weder positiv noch negativ.).
- e) Negation: Es gibt eine nichtnegative reelle Zahl, die nicht positiv ist.
Diese Negation ist wahr ($x = 0$ ist nämlich nichtnegativ und nicht positiv).
- f) Negation: Die Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ hat keine reelle Lösung.
Diese Negation ist wahr. Für reelle x gilt nämlich $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)^2 + 2 \geq 2 > 0$.
- g) Negation: Es gibt ein Viereck, dass zugleich Rechteck und Drachenviereck, aber kein Quadrat ist. Dies ist falsch, die gegebene Aussage dagegen wahr.
- h) Negation: Es gibt einen Studenten, der nicht bei der Vorlesung anwesend ist.
Man kann auch formulieren: Mindestens ein Student ist bei der Vorlesung nicht anwesend.
- i) Negation: Alle Studenten wohnen im Wohnheim.