

### Aufgabe 2.27

Negieren Sie die folgenden Aussagen! Schreiben Sie dabei für a) bis g) die Aussagen und ihre Negationen auch mit dem Existenz- bzw. Allquantor und geben Sie an, ob die Aussage oder ihre Negation wahr ist!

- Jede natürliche Zahl hat einen Vorgänger.
- Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.
- Es gibt keine reelle Zahl, die zugleich positiv und negativ ist.
- Es gibt keine reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist.
- Jede nichtnegative reelle Zahl ist positiv.
- Die Gleichung  $x^2 + 2x + 3 = 0$  hat eine reelle Lösung.
- Jedes Viereck, das zugleich Rechteck und Drachenviereck ist, ist ein Quadrat.
- Jeder Student ist bei der Vorlesung anwesend.
- Es gibt einen Studenten, der nicht im Wohnheim wohnt.

### Lösung:

Negation von  $\forall$ : „Nicht für alle gilt“ oder „Es gibt ein ..., für das nicht gilt“  
 $\exists$ : „Es gibt kein ..., für das gilt“ oder „Für alle gilt nicht“

Ausgangsaussage	Negation
a) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : m = n - 1$ falsch	$\exists n \in \mathbb{N} : \nexists m \in \mathbb{N} : m = n - 1$ wahr ( $n = 1$ bzw. $n = 0$ ) Es gibt eine natürliche Zahl, die keinen Vorgänger hat.
b) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : m = n + 1$ wahr	$\exists n \in \mathbb{N} : \nexists m \in \mathbb{N} : m = n + 1$ falsch Es gibt eine natürliche Zahl, die keinen Nachfolger hat.
c) $\nexists x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x < 0$ wahr	$\exists x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x < 0$ falsch Es gibt eine reelle Zahl, die zugleich positiv und negativ ist.
d) $\nexists x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \geq 0$ falsch	$\exists x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \geq 0$ wahr ( $x = 0$ ) Es gibt eine reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist.
e) $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Rightarrow x > 0$ falsch	$\exists x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge \neg(x > 0)$ wahr ( $x = 0$ ) Es gibt eine nichtnegative reelle Zahl, die nicht positiv ist.
f) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 3 = 0$ falsch	$\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 3 = 0$ wahr ( $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$ ) Die Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ hat keine reelle Lösung.
g) $\forall v \in V : (v \in R \wedge v \in D) \Rightarrow v \in Q$ wahr	$\exists v \in V : v \in R \wedge v \in D \wedge v \notin Q$ falsch

Dabei sei  $V$  die Menge der Vierecke,  $R$  die der Rechtecke,  $D$  die der Drachenvierecke und  $Q$  die der Quadrate.

- a) Negation: Es gibt eine natürliche Zahl, die keinen Vorgänger hat.  
Diese Negation ist wahr (Je nach Definition ist  $n = 1$  bzw.  $n = 0$  eine solche Zahl.).
- b) Negation: Es gibt eine natürliche Zahl, die keinen Nachfolger hat.  
Dies ist falsch, die gegebene Aussage ist wahr (Mit  $n$  ist jeweils auch  $n+1$  natürliche Zahl.).
- c) Negation: Es gibt eine reelle Zahl, die zugleich positiv und negativ ist.  
Dies ist falsch, die gegebene Aussage ist wahr.
- d) Negation: Es gibt eine reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist.  
Diese Negation ist wahr ( $x = 0$  ist nämlich weder positiv noch negativ.).
- e) Negation: Es gibt eine nichtnegative reelle Zahl, die nicht positiv ist.  
Diese Negation ist wahr ( $x = 0$  ist nämlich nichtnegativ und nicht positiv).
- f) Negation: Die Gleichung  $x^2 + 2x + 3 = 0$  hat keine reelle Lösung.  
Diese Negation ist wahr. Für reelle  $x$  gilt nämlich  $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)^2 + 2 \geq 2 > 0$ .
- g) Negation: Es gibt ein Viereck, dass zugleich Rechteck und Drachenviereck, aber kein Quadrat ist. Dies ist falsch, die gegebene Aussage dagegen wahr.
- h) Negation: Es gibt einen Studenten, der nicht bei der Vorlesung anwesend ist.  
Man kann auch formulieren: Mindestens ein Student ist bei der Vorlesung nicht anwesend.
- i) Negation: Alle Studenten wohnen im Wohnheim.