Aufgabe 2.16

a und b seien folgende Aussagen:
a: $\sqrt{2}$ ist irrational.
b: Die Primfaktorzerlegung jeder natürlichen Zahl ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.

Es sei bekannt, dass die Aussage b wahr ist. Führen Sie den indirekten Beweis dafür, dass $\sqrt{2}$ irrational ist!

Lösung:

Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational, d.h. $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ mit $p,q\in\mathbb{N}$. Daraus folgt $\sqrt{2}q=p$ und durch Quadrieren $2q^2=p^2$. Während die linke Seite dieser Gleichung eine ungerade Anzahl Primfaktoren hat, hat die rechte Seite eine gerade Zahl Primfaktoren. Dies ist ein Widerspruch zu der als bekannt vorausgesetzten Aussage b, so dass $\sqrt{2}$ nicht rational sein kann, also irrational ist.

Es wurde gezeigt, dass aus $\neg a$ („$\sqrt{2}$ ist rational.“) $\neg b$ folgt. Nach dem Satz von der Kontraposition (s. z.B. Aufgabe 2.12) ist dies äquivalent zu $b \Longrightarrow a$. Da b als wahr bekannt ist, ist also auch a wahr, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational.