Aufgabe 1.33

Bestimmen Sie ohne Verwendung von Mitteln der Differenzialrechnung die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_2 \neq 0$! Welcher Zusammenhang besteht zur Lösungsformel für quadratische Gleichungen?

Lösung:

Störend ist der lineare Term a_1x, da dieser in Abhängigkeit von x unterschiedliches Vorzeichen annehmen kann. Seine Beseitigung erfolgt durch quadratische Ergänzung:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2\left(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x\right) + a_0 = a_2\left[\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2^2}\right] + a_0 = a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}.$$

Damit gilt offensichtlich für $a_2 > 0$ immer $p_2(x) \geq a_0 - \dfrac{a_1^2}{4a_2}$ und speziell $p_2\left(-\dfrac{a_1}{2a_2}\right) = a_0 - \dfrac{a_1^2}{4a_2}$, während für $a_2 < 0$ immer $p_2(x) \leq a_0 - \dfrac{a_1^2}{4a_2}$ und speziell ebenfalls $p_2\left(-\dfrac{a_1}{2a_2}\right) = a_0 - \dfrac{a_1^2}{4a_2}$ gilt.

Scheitelpunkt ist damit in jedem Fall $\left(-\dfrac{a_1}{2a_2}\,,\, a_0 - \dfrac{a_1^2}{4a_2}\right)$.

Mithilfe der quadratischen Ergänzung erfolgt auch die Lösung der quadratischen Gleichung $\P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} = 0, \qquad \left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2},$$

$$x + \frac{a_1}{2a_2} = \pm\sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}}, \quad x = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$ (bekannt insbes. für $a_2 = 1$, $a_1 = p$, $a_0 = q$).