

Aufgabe 1.32

Was versteht man unter quadratischer Ergänzung? Geben Sie ein Beispiel für eine Aufgabenstellung an, bei der ihre Anwendung nützlich ist!

Lösung:

Unter quadratischer Ergänzung versteht man die Einbeziehung eines linearen Terms in einen quadratischen. Dabei wird die binomische Formel genutzt: $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$.

Nützlich ist dies z.B. bei der Bestimmung des Scheitelpunktes einer Parabel:

$$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \implies \text{Scheitelpunkt in } (x, y) = \left(-\frac{p}{2}, q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Analog werden Nullstellen quadratischer Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q = 0 &\iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q, \quad x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \end{aligned}$$