7. Zeitoptimale Steuerung linearer Probleme III

1. Beweisen Sie Satz IV.26 der Vorlesung:
   Das System $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, mit $(A, B) \in I\!R^{n\times n} \times I\!R^{n\times m}$, ist genau dann normal, wenn
   $$\text{Rang}([b_i, Ab_i, \ldots, A^{n-1}b_i]) = n \qquad \forall i = 1, \ldots, m.$$
   Hinweis: Beweis analog zu Sätzen IV.6 und IV.7.

2. Beweisen Sie Satz IV.36 der Vorlesung:
   Sei $U = U_c$ und $y \in K(t_*, x_0)$. Dann ist die Steuerung, welche in der Zeit t_* von x_0 nach y steuert, eindeutig, genau dann wenn y Extremalpunkt von $K(t_*, x_0)$ ist.

3. Zeigen Sie:
   Wenn
   $$\int_0^t e^{-As} B[w(s) - u(s)]\mathrm{d}s = 0 \qquad \forall 0 \le t \le t_*,$$
   dann ist
   $$B[w(t) - u(t)] = 0 \qquad \text{fast überall in } [0, t_*].$$
   Dazu seien $w(t)$ und $u(t)$ beschränkte, messbare Funktionen von $[0, t_*]$ nach $I\!R^m$.
   (Teilschritt in Beweis von Lemma IV.35).

4. Zeigen Sie dass das Bang-Bang Prinzip auch für zeitabhängige lineare Systeme mit (zeitabhängiger) Inhomogenität gilt,
   $$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + c(t),$$
   mit stetiger Funktion $c(t)$ von $[0, \infty)$ nach $I\!R^n$.

5. Geben Sie eine Vorschrift an mit der man die Lösung des zeitoptimalen Null-Steuerproblems ($n = m = 1$)
   $$\dot{x}(t) = bx(t) + u(t), \qquad \mathcal{T}_f = \{0\}, \qquad b < 0$$
   bestimmen kann.