HA6. Zeitoptimale Steuerung linearer Probleme II

1. Beweisen Sie **Lemma IV.13** der Vorlesung:
   Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ konvex mit $0 \in \text{int}(U)$. Dann gilt für das autonome System $\dot{x} = Ax + Bu$:

   a) N ist konvex,

   b) U symmetrisch $\Rightarrow N$ symmetrisch

   c) N offen $\Leftrightarrow 0 \in \text{int}(N)$,

   d) $\text{Rang}(S) = n \Leftrightarrow 0 \in \text{int}(N)$,

   e) $\text{Rang}(S) < n$
   $\Rightarrow \exists$ Hyperebene $Y^\perp$ mit $N(t) \subset Y^\perp \; \forall t > 0$ (also $\exists\, y \in \mathbb{R}^m$: $y^T x = 0 \quad \forall x \in N(t)$)
   $\Rightarrow N \subset Y^\perp$.

   Hinweise:

   - Beginnen Sie mit Teil e), dann d), c). Teile a), b) sind unabhängig von den übrigen.
   - Die wesentlichen Beweisideen wurden bereits in der Vorlesung in Beweisen verwendet. Insbesondere ist hier auf die Sätze IV.6 und IV.7 hinzuweisen.
   - Eine Hyperebene ist keine offene Menge.

   (12 Punkte)

2. Lösen Sie das Problem der zeitoptimalen Steuerung des harmonischen Oszillators:
   Minimiere T unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -x_1 + u(t) \qquad \text{für } t \in [0, T], \\
x(0) &= x_0, \\
x(T) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
u(t) &\in [-1, 1] \quad \forall t.
\end{aligned}
$$

   (8 Punkte)