

Musterlösung

1. (a) i. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt eindeutige LR-Zerlegung mit R invertierbar
 $\iff \det(A(1:k, 1:k)) \neq 0 \forall k = 1, \dots, n.$ (1p)

ii. $\kappa(A) = \|A\|_* \|A^{-1}\|_*$ (1p)

- iii. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt eindeutige Cholesky-Zerlegung $\iff A$ ist positiv definit und symmetrisch. (1p)

A. A symmetrisch $\iff A = A^T$

B. A positive definit $\iff x^T A x > 0 \forall x \neq 0$

(1p)

- (b) i.

$$A = LR$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$Ly = b \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad Rx = y \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(3p)

- ii.

$$PA = LR$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 24 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(3p)

- iii. Erstes Pivotelement: $A_{3,3} = 24$

(1p)

- (c) Führe von Gram'scher Matrix $C = [\langle \phi_i, \phi_j \rangle]_{i,j=1}^3$ die Cholesky-Zerlegung $C = GG^*$ mit der unteren Dreiecksmatrix G durch.

$$\Rightarrow G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} := G^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

Beweis:

$$[\langle \psi_i, \psi_j \rangle]_{i,j=1}^2 G^{-1} [\langle \phi_i, \phi_j \rangle]_{i,j=1}^2 G^{-T} = G^{-1} G G^T G^{-T} = \mathbb{I}_2$$

Alternative: Gramm-Schmidt-Orthogonalisierung

$$\psi_1 = \frac{\phi_1}{\|\phi_1\|} = \frac{\phi_1}{\sqrt{\langle \phi_1, \phi_1 \rangle}} = \phi_1$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_2 &= \phi_2 - \alpha \psi_1, & \alpha &= \langle \phi_2, \psi_1 \rangle = \langle \phi_2, \phi_1 \rangle = -2 \\ &= \phi_2 - (-2)\psi_1 = \phi_2 + 2\phi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{\hat{\psi}_2}{\|\hat{\psi}_2\|} = \frac{\phi_2 + 2\phi_1}{\|\phi_2 + 2\phi_1\|} \\ &= \frac{\phi_2 + 2\phi_1}{\langle \phi_2 + 2\phi_1, \phi_2 + 2\phi_1 \rangle} \\ &= \frac{\phi_2 + 2\phi_1}{\langle \phi_2, \phi_2 \rangle + 4\langle \phi_1, \phi_2 \rangle + 4\langle \phi_1, \phi_1 \rangle} \\ &= \frac{\phi_2 + 2\phi_1}{5 + 4 \cdot (-2) + 4 \cdot 1} \\ &= \phi_2 + 2\phi_1 \end{aligned}$$

(4p)

2. (a) i. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Die Aufgabe, $x_* \in \mathbb{R}^m$ so zu bestimmen, daß

$$\|r(x_*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^m} \|b - Ax\|$$

heißt lineares Ausgleichsproblem.

(1p)

- ii. $\|r(x_*)\|$ heißt dabei Defekt des Ausgleichsproblems.

(1p)

- iii. $A = U\Sigma V^T$ mit $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und
 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\min\{m,n\}}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

(1p)

- iv. Es gilt $P^T = P$ (symmetrisch) und $P^T P = P P^T = \mathbb{I}$ (orthogonal).

(2p)

- (b) Normalenform $A^T A x = A^T b$:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 33 \\ 48 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 33 \\ 48 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 11 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4p)

- (c)

$$u := r \quad v := \frac{p}{q} \quad w := pq$$

$$f(x) = u \frac{x - x^3}{6} + v(x - 1)(x) \left(\frac{11}{6} + \frac{5}{6}x \right) + w(x + 3)$$

$$\begin{aligned}
A &= \left[\begin{array}{ccc} \frac{x_i - x_i^3}{6} & (x_i - 1)(x_i)(\frac{11}{6} + \frac{5}{6}x_i) & (x_i + 3) \end{array} \right]_{i=1}^4 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
b &= \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{QR-Zerlegung: } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = Q^T b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -15 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow u = 1, v = 2$ und $w = 3$

Zusammen mit $r, p, q > 0$ ergibt sich damit

$$r = 1, \quad p = \sqrt{6} \quad \text{und} \quad q = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

(6p)

3. (a) i. Ein Fixpunkt x^* heißt anziehend, falls $\exists U_\delta(x^*)$ mit $x^{(j)} \rightarrow x^*$ $\forall x^{(0)} \in U_\delta(x^*)$ bzw. abstoßend, falls $\exists U_\delta(x^*)$, so daß $\forall x^{(0)} \in U_\delta(x^*) \setminus \{x^*\} \exists m \in \mathbb{N}$ mit $x^{(m)} \notin U_\delta(x^*)$.
- ii. Eine Folge $\{x^{(j)}\}_{j=0}^\infty$ für die $\exists p \geq 1, c \geq 0$ ($c < 1$ für $p = 1$) mit

$$\|x^{(j+1)} - x^*\| \leq c \|x^{(j)} - x^*\|^p, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

heißt konvergent von p -ter Ordnung.

iii. 2

(b) i.

$$x^{(j+1)} = x^{(j)} - (Df(x^{(j)}))^{-1} f(x^{(j)})$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x - 1 \\ -e^z \cos y - 2 \\ e^z \sin y - 3 \end{bmatrix}$$

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^z \sin y & -e^z \cos y \\ 0 & e^z \cos y & e^z \sin y \end{bmatrix} \Rightarrow Df(x)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sin y}{e^z} & \frac{\cos y}{e^z} \\ 0 & -\frac{\cos y}{e^z} & \frac{\sin y}{e^z} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{(j+1)} = 1 \\ y^{(j+1)} = y^{(j)} + 2 \frac{\sin y^{(j)}}{e^{z^{(j)}}} + 3 \frac{\cos y^{(j)}}{e^{z^{(j)}}} \\ z^{(j+1)} = z^{(j)} - 1 - 2 \frac{\cos y^{(j)}}{e^{z^{(j)}}} + 3 \frac{\sin y^{(j)}}{e^{z^{(j)}}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^1 = 1 \\ y^1 = 3 \\ z^1 = -3 \end{cases}$$

(3p)

ii.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^4 + 2x_k^3 + 3x_k^2 + 4x_k + 5}{4x_k^3 + 6x_k^2 + 6x_k + 4}$$

$$\begin{array}{ll}
a_0 & := x_k & b_0 & := 4 \cdot x_k \\
a_1 & := a_0 + 2 & b_1 & := b_0 + 6 \\
a_2 & := a_1 \cdot x_k & b_2 & := b_1 \cdot x_k \\
a_3 & := a_2 + 3 & b_3 & := b_2 + 6 \\
a_4 & := a_3 \cdot x_k & b_4 & := b_3 \cdot x_k \\
a_5 & := a_4 + 4 & b_5 & := b_4 + 4 \\
a_6 & := a_5 \cdot x_k & & \\
a_7 & := a_6 + 5 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
c := a_7/b_5 \\
x_{k+1} := x_k - c
\end{array}$$

Alternative:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(((x_k + 2)x_k) + 3)x_k + 4)x_k + 5}{((4x_k + 6)x_k + 6)x_k + 4}$$

(3p)

(c) $\sqrt[n]{a}$ ist gesucht \Leftrightarrow positive Nst. von $x^n - a$ wird gesucht

$$x_{k+1} := x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}}, \quad x_0 = a$$

$$\begin{array}{l}
x_0 := 2 \\
x_1 := x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 2 - \frac{4 - 2}{4} = \frac{3}{2} \\
x_2 := x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{3}{2} * \frac{3}{2} - 2}{3} = 1.5 - \frac{0.25}{3} \\
:= 1.5 - 0.08\bar{3} = \underline{1.416\bar{7}}
\end{array}$$

(4p)

4. (a) i. $\mathbb{L}_j(x) := \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x-x_i}{x_j-x_i}, j = 0, \dots, n$ (1p)

ii. A. $S_{\Delta_n} \in C^2[a, b]$
 B. $S_{\Delta_n}|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3$ (2p)

iii. natürliche Splines (1p)

(b) i. A. Schema der dividierten Differenzen

$$\begin{array}{l|l} x_0 = 1 & f_0 = \underline{3} \\ & f_1 = 11 \quad f_{01} = \underline{8} \\ & f_2 = 59 \quad f_{12} = 48 \quad f_{012} = \underline{20} \\ & f_3 = 171 \quad f_{23} = 112 \quad f_{123} = 32 \quad f_{0123} = \underline{4} \end{array}$$

$$p(x) = 3 + 8(x-1) + 20(x-1)(x-2) + 4(x-1)(x-2)(x-3) \quad (3p)$$

B.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 + (x-1)(8 + (x-2)(20 + 4(x-3))) \\ p(0) &= 3 + (0-1)(8 + (0-2)(20 + 4(0-3))) \\ &= 3 + (0-1)(8 + (0-2)8) \\ &= 3 + (0-1)(-8) \\ &= \underline{11} \end{aligned}$$

(2p)

ii. Hermite Interpolation mit dem Schema dividierter Differenzen

$$\begin{array}{l|l} x_0 = 1 & f_0 = \underline{1} \\ & f'_0 = \underline{2} \\ x_0 = 1 & f_0 = 1 \quad f_{001} = \underline{3} \\ & f_{01} = 5 \quad f_{0011} = \underline{4} \\ x_1 = 2 & f_1 = 6 \quad f_{011} = 7 \\ & f'_1 = 12 \\ x_1 = 2 & f_1 = 6 \end{array}$$

$$p(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^2(x-2)$$

(3p)

- (c) i. $a_0 = f_0, a_1 = f_1 - f_0, a_2 = f_2 - f_0$
ii. $g_0(x, y) = 1 - x - y, g_1(x, y) = x, g_2(x, y) = y$

(3p)

5. (a) i. Sei $x_{k+1} - x_k = h = x_k - x_{k-1}$

Vorwärtsdifferenzenquotient:

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} = f'(x_k) + O(h)$$

Rückwärtsdifferenzenquotient:

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h} = f'(x_k) + O(h)$$

Zentraler Differenzenquotient:

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1}))}{2h} = f'(x_k) + O(h^2)$$

(2p)

- ii. Konsistenz der Approximation f_h von f liegt genau dann vor, wenn gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f - f_h) = 0.$$

Die Konsistenzordnung k liegt dann vor, wenn eine Abschätzung $|f - f_h| \leq Ch^k$ mit einer von h unabhängigen Konstante C gilt.

(2p)

- (b) i. Mittelpunkregel:

$$\int_2^4 3x^2 dx \approx (b - a) f\left(\frac{b+a}{2}\right) = (4 - 2) 3 \cdot 3^2 = \underline{54}$$

Trapezregel:

$$\int_2^4 3x^2 dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) = \frac{4-2}{2} (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4^2) = \underline{60}$$

Simpson-Regel:

$$\int_2^4 3x^2 dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)) = \frac{4-2}{6} (3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2) = \underline{56}$$

Alternativ zur Simpson-Regel: Durch Simpson-Regel wird Integral eines Polynom 2. Grades exakt berechnet

$$\Rightarrow \int_2^4 3x^2 dx = x^3 \Big|_2^4 = \underline{56}$$

(3p)

ii. A. Ableitungen:

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &\approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0.32 - 0.16}{0.25} = \underline{0.64} \\
 f'(x_1) &\approx \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{0.16 - 0.16}{0.5} = \underline{0} \\
 f'(x_2) &\approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0.16 - 0.32}{0.25} = \underline{-0.64}
 \end{aligned}$$

(2p)

B. Fläche

$$\begin{aligned}
 I(f) &= \frac{x_n - x_0}{2n} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\
 &= \frac{0.5}{4} (0.16 + 2 \cdot 0.32 + 0.16) \\
 &= \frac{0.96}{8} = \underline{0.12}
 \end{aligned}$$

(2p)

(c) Taylorentwicklungen:

$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + O(h^3) \\
 f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + O(h^3)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a \cdot f(x+h) + b \cdot f(x) + c \cdot f(x-h)}{h} = f'(x) + O(h^2)$$

$$\begin{aligned}
 &af(x) + bf(x) + cf(x) = 0f(x) \\
 \Rightarrow &af'(x) - cf'(x) = 1f'(x) \\
 &af''(x) + cf''(x) = 0f''(x)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h^2)$$

(4p)