1. (a) i. Wann besitzt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine eindeutige LR-Zerlegung mit R invertierbar?

   ii. Definieren Sie die Konditionszahl $\kappa(A)$ einer Matrix A bzgl. einer Norm $\|.\|$!

   iii. Welche Eigenschaften benötigt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für die Cholesky-Zerlegung? Nennen und definieren Sie diese!

(4p)

(b) Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 11 \\ 8 & 16 & 24 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 53 \\ 112 \end{bmatrix}.$$

   i. Bestimmen Sie die LR-Zerlegung ohne Pivotisierung für A und lösen sie damit das Gleichungssystem $Ax = b$.

   ii. Bestimmen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung für A.

   iii. Geben Sie für die LR-Zerlegung mit vollständiger Pivotisierung das erste Pivotelement an.

(7p)

(c) Gegeben sei der zweidimensionale Raum L mit den Basisfunktionen ϕ_1 und ϕ_2. Desweiteren sei in L das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ über die Gram'sche Matrix

$$[\langle\phi_i,\phi_j\rangle]_{i,j=1}^3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

und die Norm durch $\|\phi_i\| = \sqrt{\langle\phi_i,\phi_i\rangle}$ definiert. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{\psi_i\}_{i=1}^2$ in Abhängigkeit von der gegebenen Basis $\{\phi_i\}_{i=1}^2$!

(4p)

2. (a) i. Definieren Sie "lineares Ausgleichsproblem"!
   ii. Was ist der Defekt eines linearen Ausgleichsproblems?
   iii. Was versteht man unter der Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$?
   iv. Nennen und definieren Sie zwei Eigenschaften, die eine Householder-Matrix P besitzt!

(5p)

(b) Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Lösen Sie das überbestimmte Gleichungssytem $Ax = b$ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate mittels der Lösung der Normalengleichung!

(4p)

(c) Für einen technischen Prozeß, der durch

$$f(x) = r\frac{x - x^3}{6} + p\frac{(x-1)x(\frac{11}{6} + \frac{5}{6}x)}{q} + pq(x+3)$$

charakterisiert wird, seien die Meßwerte

x_i	-2	-1	0	1
f_i	6	10	5	15

gegeben. Man bestimme die Parameter $r, p, q > 0$ optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate! (*Hinweis:* Überführen Sie das nichtlineare Ausgleichsproblem in ein lineares!)

(6p)

3. (a) i. Wann heißt ein Fixpunkt x^* anziehend bzw. abstoßend?

   ii. Definieren Sie den Begriff "Konvergenz von p-ter Ordnung" für eine Folge $\{x^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$!

   iii. Welche optimale Konvergenzordnung hat das Newton-Verfahren, wenn es konvergiert und $Df(x^*)$ regulär ist?

(5p)

(b) i. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ -e^z \cos y &= 2 \\ e^z \sin y &= 3 \end{aligned}$$

soll mittels Newton-Verfahren gelöst werden. Geben Sie dazu die Iterationsvorschrift in der Form $x_i^{(j+1)} = f(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)})$, $i = 1, 2, 3$, an und berechnen Sie ausgehend vom Startwert $(x^0, y^0, z^0) = (0, 0, 0)$ die erste Iterierte.

   ii. Für die Nullstellenbestimmung des Polynoms $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ wird das Newton-Verfahren verwendet. Formulieren Sie einen Iterationsschritt in Form eines Algorithmus! Dabei soll aus Stabilitätsgründen zur Auswertung der Polynome das Hornerschema verwendet werden.

(6p)

(c) Entwickeln Sie eine auf Grundrechenarten basierende Iterationsvorschrift, um für beliebige $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{a}$ zu bestimmen! Benutzen Sie diese, um $\sqrt{2}$ (1.4142) auf 2 Nachkommastellen genau zu berechnen!

(4p)

4. (a) i. Definieren Sie für $(n+1)$ Stützstellen $x_i,\ i = 0, ..., n$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ die Lagrange-Interpolationspolynome.

ii. Welche zwei Eigenschaften hat eine zu $\triangle_n := \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ gehörende kubische Spline-Funktion $S_{\triangle_n} : [a, b] \to \mathbb{R}$?

iii. Beim Schiffsbau wird eine Planke so an verschiedenen Punkten eingespannt, daß sie am Anfang und am Ende ein Stück über die letzten Befestigungen hinausragt. Welche Art von Spline-Funktion muß zur Interpolation der Schiffsplanke verwendet werden?

(4p)

(b) i. Die Stützstellen $x_0, ..., x_3$ seien mit ihren zugehörigen Funktionswerten wie folgt gegeben:

x_i	1	2	3	4
f_i	3	11	59	171

A. Bestimmen Sie das Newton-Interpolationspolynom niedrigsten Grades durch die gegebenen Punkte!

B. Werten Sie das enstandene Polynom mittels des Hornerschemas am Punkt $\tilde{x} = 0$ aus!

ii. In den Stützstellen $x_0 = 1,\ x_1 = 2$ seien sowohl die Funktionswerte $f(x_0) = 1,\ f(x_1) = 6$ als auch die Ableitungen $f'(x_0) = 2,\ f'(x_1) = 12$ gegeben. Bestimmen Sie mittels Hermite-Interpolation das Interpolationspolynom niedrigsten Grades.

(8p)

(c) Wir betrachten das Dreieck mit den Eckpunkten $S_0 = (0, 0)$, $S_1 = (1, 0)$ und $S_2 = (0, 1)$. In den Eckpunkten $S_i = (x_i, y_i)$ seien die Funktionswerte f_i gegeben.

i. Man bestimme die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 für

$$g(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

so, daß $g(x_i, y_i) = f_i$ für $i = 0, 1, 2$ gilt.

ii. Man gebe Funktionen $g_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2$, an, so daß sich obige Funktion in der Form

$$g(x, y) = f_0 \cdot g_0(x, y) + f_1 \cdot g_1(x, y) + f_2 \cdot g_2(x, y)$$

darstellen läßt.

(3p)

5. (a) i. Definieren Sie Vorwärts-, Rückwärts- und zentraler Differenzenquotient.

ii. Die Ableitung f' einer Funktion wird durch f'_h approximiert (h-Gitterschrittweite). Erläutern Sie kurz Konsistenz und Konsistenzordnung der Approximation!

(4p)

(b) i. Bestimmen Sie das Integral $\int_2^4 3x^2 dx$ numerisch mit Hilfe der Mittelpunktregel, der Trapezregel und der Simpsonregel.

ii. Gegeben sei eine Funktion durch die Meßreihe

x_i	0	0.25	0.5
f_i	0.16	0.32	0.16

.

A. Bestimmen Sie numerisch die Ableitungen der Funktion an den Meßpunkten! (Falls möglich, soll der zentrale Differenzenquotient verwendet werden.)

B. Benutzen Sie die zusammengesetzte Trapezregel, um im Intervall $[x_0, .., x_2]$ die Fläche unter der Funktion zu berechnen!

(7p)

(c) Gegeben seien Werte für die Stützstellen $x-h$, x und $x+h$. Leiten Sie einen Differenzenquotient der Konsistenzordnung 2 her!

(4p)