Grundlagen des QR Algorithmus

Betrachte (lineares) *Eigenwertproblem (EWP)*

(8.1) $$Ax = \lambda x, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n} \quad \text{gegeben.}$$

Beobachtung: Die Iterierten H_k der **QR Iteration**

1. $H_0 = Q_0^H A Q_0 \quad Q_0^T Q_0 = I_n$ (z.B. $Q_0 = I_n$)
2. FOR $k = 1, 2, \ldots$

   (i) $H_{k-1} := Q_k R_k$=QR Zerlegung

   (ii) $H_k := R_k Q_k$

   END

konvergieren fast immer gegen die Schurform von A.
Dies wird plausibel aufgrund folgender Beobachtungen (die auch die Grundlage eines Beweises unter gewissen Voraussetzungen liefern):

1. A und H_k sind ähnlich:
$$H_k = Q_k^H \cdots Q_1^H Q_0^H A \underbrace{Q_0 Q_1 \cdots Q_k} =: (Q^{(k)})^H A Q^{(k)},$$
   und damit gilt $\Lambda(A) = \Lambda(H_k)\, \forall k$.
2. Die QR Iteration berechnet implizit die QR Zerlegung von H_0^k,
$$H_0^k = Q^{(k)} R_k \cdots R_1 =: Q^{(k)} R^{(k)}.$$
   Damit folgt, dass die erste Spalte von $Q^{(k)}$, $q_1^{(k)} := Q^{(k)} e_1$, im Wesentlichen den Iterierten der **Potenziteration** (s.u.), angewandt auf H_0, e_1, genügt. Daraus ergibt sich (unter den Voraussetzungen von Satz 8.4), daß
$$q_1^{(k)} \to x_1, \qquad (q_1^{(k)})^H H_0 q_1^{(k)} \to \lambda_1,$$
   wobei λ_1 der betragsgrößte EW von H_0 (und damit von A) und x_1 der zugehörige (normierte) Eigenvektor ist.

   Bei Konvergenz $Q^{(k)} \to Q = [x_1, q_2, \ldots, q_n]$ folgt daher
$$Q^H A Q = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & * & * \\ \hline 0 & & \\ \vdots & & A_1 \\ 0 & & \end{array}\right].$$
   Mit Hilfe der *Unterraumiteration* (statt Potenziteration) kann man mit geeigneten Annahmen zeigen, dass
$$\operatorname{span}\{q_1^{(k)}, \ldots, q_j^{(k)}\} \to \mathcal{U}_j \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$
   Das liefert letztendlich die Konvergenz der QR Iteration.

Grundlagen des QR Algorithmus
(Vektoriteration, von Mises-Verfahren)

Annahmen:

- A diagonalisierbar, d.h. $\exists\, X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär mit $X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, wobei $X = [x_1, \ldots, x_n]$ (o.B.d.A. $\|x_j\|_2 = 1$),
- $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

Potenziteration für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $z^{(0)} \in \mathbb{C}^n$:

1. $q^{(0)} := \frac{z^{(0)}}{\|z^{(0)}\|_2}$.
2. FOR $k = 1, 2, \ldots$
   (i) $z^{(k)} := Aq^{(k-1)}$.
   (ii) $q^{(k)} := \frac{1}{\|z^{(k)}\|_2} z^{(k)}$.
   (iii) $\left(\mu^{(k)} := {q^{(k)}}^H A q^{(k)} = \frac{{z^{(k)}}^H A z^{(k)}}{{z^{(k)}}^H z^{(k)}}\right.$ = **Rayleigh-Quotient** von $\left. A, z^{(k)}.\right)$

   END

Satz 8.4 *Unter obigen Annahmen und mit $q^{(0)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$, $\alpha_1 \neq 0$ gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} \mu^{(k)} = \lambda_1, \quad \lim_{k\to\infty} q^{(k)} = \gamma x_1, \quad |\gamma| = 1$$

mit Konvergenzrate $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1.$