Numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben

- **Anfangswertaufgabe (AWA)** besteht aus
  - **gewöhnlicher Differentialgleichung 1. Ordnung:**

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ \forall t \in I = [t_0, t_0 + a], \quad y : I \to \mathbb{R}^n, \quad f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;$$

  - **Anfangsbedingung (AB):** $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$, y_0 heißt **Anfangswert (AW)**.

- **DGLn höherer Ordnung**

$$y^{(m)}(t) = g(t, y(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))$$

  sind äquivalent zu System von DGLn 1. Ordnung: Mit

$$z_1 := y, \quad z_2 := y' = z_1', \quad \ldots, \quad z_m := y^{(m-1)} = z_{m-1}'(t)$$

  erhalte

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad f(t, z) := \begin{bmatrix} z_2(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ g(t, z_1(t), \ldots, z_m(t)) \end{bmatrix}.$$

- **Voraussetzungen:**
  - f **Lipschitz bzgl.** y, d.h.

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \quad \forall y_1, y_2 \in D, \forall t \in I, \ D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen.}$$

  - **Hadamardsche Bedingungen (AWA wohlgestellt):**

  (H1) Die AWA besitzt auf I eine eindeutige Lösung $y(t)$.

  (H2) Die Lösung $y(t)$ soll stetig vom AW abhängen, d.h. für Lösungen $\tilde{y}$ mit $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$ soll gelten

$$\lim_{\tilde{y}_0 \to y_0} \tilde{y}(t) = y(t)$$

  gleichmäßig auf I.

  (H3) Kleine Störungen im AW sollen nicht zu großen Änderungen in der Lösung y führen.

- **Numerische Lösung von AWAn:**
  - Unterteile I in Teilintervalle $[t_j, t_{j+1}]$, $t_{j+1} = t_j + h_j$, $j = 0, \ldots, N-1$ (so, daß $t_N = t_0 + a$) und erhalte **Gitter** $I_h := \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$. Falls $h_j = h = \frac{a}{N}\,\forall j$, so heißt I_h **äquidistant**.
  - Approximiere $y(t)$ auf I_h durch **Gitterfunktion** $u_h : I_h \to \mathbb{R}^n$, $u_h(t_j) = u_j$ $(u_0 := y_0)$.
  - **Einschrittverfahren (ESV):**

$$u_{j+1} := u_j + h_j \Phi(t_j, u_j, h_j, f).$$

    Beispiele:
    - **explizites Eulerverfahren:** $\Phi(t_j, u_j, h_j, f) = f(t_j, u_j)$;
    - **implizites Eulerverfahren:** $\Phi(t_j, u_j, h_j, f) = f(t_j + h_j, u_{j+1}) = f(t_{j+1}, u_{j+1})$;
    - **Verfahren von Heun**:

$$\Phi(t_j, u_j, h_j, f) = \frac{1}{2}\{f(t_j, u_j) + \underbrace{f(t_j + h_j, u_j + h_j f(t_j, u_j))}_{\approx f(t_{j+1}, u_{j+1})}\};$$

    - **Modifiziertes Eulerverfahren:** $\Phi(t_j, u_j, h_j, f) = f(t_j + \frac{h_j}{2}, \underbrace{u_j + \frac{h_j}{2} f(t_j, u_j)}_{\approx f(t_j + \frac{h_j}{2}, y(t_j + \frac{h_j}{2}))})$.

    Bemerkung: Dies sind **Runge-Kutta-Verfahren**.
    ($\rightsquigarrow$ Numerik gewöhnlicher DGLn, WS 2008/09)
  - **Mehrschrittverfahren (MSV):**

$$u_{j+k} = -\alpha_0 u_j - \ldots - \alpha_{k-1} u_{j+k-1} + h\Phi(t_j, u_j, \ldots, u_{j+k}, h, f).$$

- **globaler Diskretisierungsfehler:**

$$\begin{aligned} e_h(t) &:= y(t) - u_h(t) \quad \forall t \in I_h, \quad \text{bzw.} \\ e_j &:= e_h(t_j) = y(t_j) - u_h(t_j) = y_j - u_j, \quad j = 0, \ldots, N. \end{aligned}$$

- **Konvergenz:**
  Ein Verfahren mit $\lim_{h\to 0} e_h(t) = 0$ für alle $t \in I$ heißt *konvergent*. Für $e_h(t) = \mathcal{O}(h^p)$ heißt das Verfahren *konvergent von der Ordnung p*

- **Lokaler Diskretisierungsfehler (bei ESV):**

$$\tau(\hat{t}, z, h, f) := \Delta(\hat{t}, z, h, f) - \Phi(\hat{t}, z, h, f)$$

mit $z = y(\hat{t})$ und $\Delta(\hat{t}, z, h, f) := \begin{cases} \dfrac{y(\hat{t}+h) - y(\hat{t})}{h} = \dfrac{y(\hat{t}+h) - z}{h}, & h > 0, \\ y'(\hat{t}) = f(t, z), & h = 0. \end{cases}$

Alternativ: $\tau(\hat{t}, z, h, f) = \frac{1}{h}\left\{y(\hat{t}+h) - y(\hat{t}) - h\Phi(\hat{t}, z, h, f)\right\}$, der lokale Diskretisierungsfehler ist also ein Maß für die "Erfüllbarkeit" der Verfahrensgleichung durch die exakte Lösung der AWA.

- **Konsistenz:**

Ein ESV heißt **konsistent (von der Ordnung p)**, falls

$$\tau(\hat{t}, z, h, f) = \mathcal{O}(h) \, (= \mathcal{O}(h^p)) \quad \forall \hat{t} \in I_h$$

und für alle hinreichend glatten Funktionen $f(t, y)$.

- **Konsistente ESV (mit Konsistenzordnung p) sind konvergent (von der Ordnung p).**

- **Rundungsfehlereinfluß:**

Rundungsfehler verhindern bei Rechnung mit endlicher Genauigkeit die theoretisch vorhandene Konvergenz. In der Regel gibt es ein $h_* > 0$ so daß

$$e_h(t) \searrow \quad \text{für} \quad h \to h_*+, \quad \text{aber} \quad e_h(t) \not\searrow \quad \text{für} \quad h_* > h \to 0.$$

Man kann also eine vorgegebene Genauigkeit der numerischen Approximation nicht immer durch Reduktion der Schrittweite erzielen! Dazu benötigt man Verfahren mit höherer Konsistenzordnung.