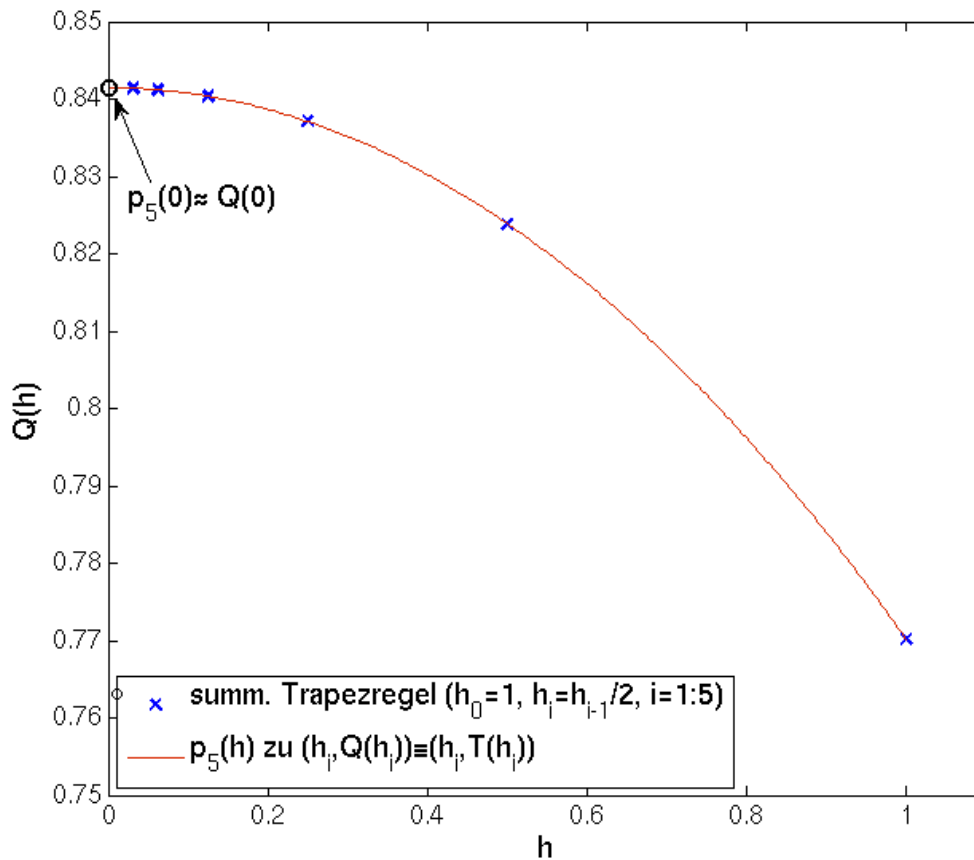


Extrapolation bei numerischer Integration

Grundidee:

- Evaluiere Quadraturformel $Q(h)$ für Schrittweiten $h_i, i = 0 \dots, m$;
- bestimme Interpolationspolynom $p_m(h) \approx Q(h)$ durch Interpolationsbedingungen $p(h_i) = Q(h_i), i = 0 \dots, m$;
- evaluiere $p_m(h)$ bei $h = 0$ (durch Neville-Aitken-Schema) und verwende $p_m(0)$ als Approximation an $Q(0) = \int_a^b f(x) dx$.

Folgende Abbildung verdeutlicht die Idee für die Approximation von $\int_0^1 \cos(x) dx$, $m = 5$ und die Schrittweiten $h_0 = 1, h_i = h_{i-1}/2$ für $i = 1, \dots, m$.



Die Grundidee funktioniert besonders gut für die summierte Trapezregel

$$T(h) = h \left\{ \frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2} \right\}, \quad h = \frac{b-a}{N}$$

(also $Q(h) \equiv T(h)$), da diese eine Entwicklung in geraden h -Potenzen zulässt. (Dies zeigt man mit Hilfe der allgemeinen Euler-MacLaurin-Formel für $(2m+2)$ -mal stetig differenzierbare Funktionen.) Damit kann man dann mit den o.g. Interpolationsbedingungen ein Polynom in h^2 bestimmen, d.h., man erhält eine Approximation von der Ordnung $\mathcal{O}(h^{2m+2})$ durch das so gewonnene Interpolationspolynom

$$\tilde{T}_{m,m}(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots + a_m h^{2m}.$$

Die Berechnung von $a_0 = \tilde{T}_{m,m}(0) =: T_{m,m}$ durch das Neville-Aitken-Schema ergibt die Rekursion

$$T_{i,k} := T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\left(\frac{h_{i-k}}{h_i}\right)^2 - 1}, \quad k = 1, \dots, m, \quad i = 0, \dots, k,$$

mit $T_{i,0} := T(h_i)$.

Die am häufigsten verwendeten Extrapolationsfolgen sind die **Romberg-Folge**:

$$h_0 := b - a, \quad h_j = \frac{h_{j-1}}{2}, \quad j = 1, \dots, m,$$

(daraus ergibt sich die **Romberg-Quadratur**, bei der sich die Rekursionsformel für die $T_{i,k}$ vereinfacht, siehe auch 13. Übung) und die **Bulirsch-Folge**:

$$h_0 := b - a, \quad h_1 = \frac{h_0}{2}, \quad h_2 = \frac{h_0}{3}, \quad h_3 = \frac{h_1}{2}, \quad h_4 = \frac{h_2}{2}, \quad h_5 = \frac{h_3}{2}, \dots$$

Satz 6.6 (Approximationsfehler)

Sei $f \in C^{2m+2}[a, b]$. Dann gilt

$$T_{m,m} - \int_a^b f(x) dx = (b-a) h_0^2 \cdots h_m^2 \frac{\beta_{m+1}}{(2m+1)!} f^{(2m+2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Dabei ist

$$\beta_k := (-1)^{k+1} B_{2k}(0)$$

die k -te **Bernoulli-Zahl**, und $B_j(x)$ das j -te **Bernoulli-Polynom**, definiert durch die Rekursion

$$B_0(x) = 1, \quad B'_k(x) = kB_{k-1}(x), \quad k \geq 1$$

und

$$\int_0^1 B_k(x) dx = 1 \quad (\text{zur Festlegung der Integrationskonstante}).$$