Wiederholung zur Spline-Interpolation

- **Spline-Funktionen:**

  Eine zu $\Delta_n := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gehörende **Spline-Funktion** $S_{\Delta_n} : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:

  (i) $S_{\Delta_n} \in C^{2k}[a, b]$

  (ii) $S_{\Delta_n}|_{[x_j,x_{j+1}]} \in \Pi_{2k+1}$.

  Für $k = 0$ ergeben sich **lineare Splines**, für $k = 1$ **kubische Splines**.

  Definiert man die Funktionenklassen

  $$\begin{aligned} K^\ell(a,b) \;:=\; & \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f^{(i)}, i = 0, \ldots, \ell-1 \,\exists \text{ und ist absolut stetig,} \\ & f^{(\ell)} \,\exists \text{ f.ü. auf } [a,b], f^{(\ell)} \in L_2(a,b)\} \end{aligned}$$

  und für periodische Funktionen mit Periode $b - a$

  $$K_p^\ell(a,b) := \{f \in K^\ell(a,b) \,|\, f^{(i)}, i = 0, \ldots, \ell-1 \quad (b-a)-\text{periodisch}\},$$

  so gilt $S_{\Delta_n} \in K^{2k+1}(a, b)$ und S_{Δ_n} ist $(b - a)$**-periodisch** $\Leftrightarrow S_{\Delta_n} \in K_p^{2k+1}(a, b)$.

- **Maß für mittlere Krümmung/Deformationsenergie von $f \in C^2[a, b]$:**

  $$w(f) := \int_a^b |f''(x)|^2 dx$$

  Beachte: Krümmung ist definiert durch $\frac{f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}^3}$, Krümmung $\approx f''(x)$ falls $f'(x)$ "klein".

- **Satz 5.22: (Existenz- und Eindeutigkeitssatz der Spline-Interpolation)**
  Sei $f \in K^2(a,b)$, S_{Δ_n} kubischer Spline zu Δ_n. Weiter sei $f_j := f(x_j) = S^f_{\Delta_n}(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$, d.h. $S^f_{\Delta_n}$ ein interpolierender kubischer Spline zu f. Dann gilt
  $$w(f - S^f_{\Delta_n}) = w(f) - w(S^f_{\Delta_n}) \geq 0,$$
  falls $S^f_{\Delta_n}$ eine der folgenden drei Bedingungen erfüllen:
  *(i) $S''_{\Delta_n}(a) = S''_{\Delta_n}(b) = 0$ **(natürlicher Spline)**;*
  *(ii) $f \in K^2_p(a,b)$, S_{Δ_n} $(b-a)$-periodisch **(periodischer Spline)**;*
  (iii) $f'(a) = S'_{\Delta_n}(a)$, $f'(b) = S'_{\Delta_n}(b)$.
  In allen drei Fällen ist $S^f_{\Delta_n}$ eindeutig bestimmt.

- **Konstruktion kubischer interpolierender Splines:**
  Definiere **Momente** $M_j := S''_{\Delta_n}(x_j)$, $h_{j+1} := x_{j+1} - x_j$. Dann gilt für $x \in [x_j, x_{j+1}]$:
  $$\begin{aligned}
  S''_{\Delta_n}(x) &= M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_{j+1}}, \\
  S'_{\Delta_n}(x) &= -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + \alpha_j, \\
  S_{\Delta_n}(x) &= M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_{j+1}} + \alpha_j (x - x_j) + \beta_j,
  \end{aligned}$$
  mit
  $$\alpha_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j), \quad \beta_j = f_j - M_j \frac{h^2_{j+1}}{6}.$$
  $\Rightarrow$ Spline über Momente bestimmt, aber suche Darstellung
  $$S_{\Delta_n}(x)|_{[x_j, x_{j+1}]} = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3.$$
  Es gilt:
  $$\begin{aligned}
  a_j &= S_{\Delta_n}(x_j) = f_j, \\
  b_j &= S'_{\Delta_n}(x_j) = -\frac{M_j h_{j+1}}{2} + \alpha_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} + 2M_j), \\
  c_j &= \frac{S''_{\Delta_n}(x_j)}{2} = \frac{1}{2} M_j, \\
  d_j &= \frac{S'''_{\Delta_n}(x_j^+)}{6} = \frac{M_{j+1} - M_j}{6h_{j+1}}.
  \end{aligned}$$