

Newton-Verfahren

- **Konvergenzordnung:**

Eine Folge $\{x^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$ für die $\exists p \geq 1, c \geq 0$ (mit $c < 1$ für $p = 1$), so daß

$$(4.5) \quad \|x^{(j+1)} - x^*\| \leq c \|x^{(j)} - x^*\|^p, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

heißt **(Q-)konvergent von p -ter Ordnung**.

$p = 1$: **lineare Konvergenz**,

$p = 2$: **quadratische Konvergenz**,

$p = 3$: **kubische Konvergenz**.

Superlineare Konvergenz (schneller als linear):

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(j+1)} - x^*\|}{\|x^{(j)} - x^*\|} = 0.$$

Beachte: Konvergente Fixpunktiteration ist mindestens linear konvergent.

- **Idee des Newton-Verfahrens für $f(x) = 0$:**

- **geometrisch:** Ersetze f durch Tangente an f in $x^{(0)}$ und bestimme die Schnittstelle mit der x -Achse. Iteriere diesen Prozeß, bis $\|f(x)\|$ klein genug.
- **analytisch:** Ersetze f durch Taylorpolynom (Entwicklung um $x^{(0)}$) vom Grad 1 und bestimme die Nullstelle. Iteriere diesen Prozeß, bis $\|f(x)\|$ klein genug.

- **Newton-Verfahren:**

$$(4.6) \quad x^{(j+1)} = x^{(j)} - \left(Df(x^{(j)}) \right)^{-1} f(x^{(j)})$$

Algorithmus:

```

WHILE  $\|f(x)\| > \eta$  ( $\eta =$  geg. Toleranz)
     $b := f(x)$ 
     $J := Df(x)$ 
    Löse  $J\delta = -b$  mit LR-Zerlegung etc.
     $x := x + \delta$ 
END WHILE

```

- **Satz 4.8:**

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, offen. Weiter sei $Df(x^*)$ regulär und es existieren Konstanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$ derart, daß

- (i) $\|Df(x^*)^{-1}\| \leq \alpha$,
- (ii) $\|Df(x) - Df(y)\| \leq \beta\|x - y\| \quad \forall x, y \in B(x^*, \gamma)$,

wobei $\|\cdot\|$ eine konsistente Norm sei. Dann existiert $\delta > 0$ so, daß $\forall x^{(0)} \in B(x^*, \delta)$ die durch (4.6) generierte Folge eindeutig bestimmt ist mit $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(j)} = x^*$ und quadratische Konvergenz vorliegt:

$$(4.7) \quad \|x^{(j+1)} - x^*\| \leq \alpha\beta\|x^{(j)} - x^*\|^2.$$

(Hier, $B(x^*, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^*\| < r\}$)

Also: Konvergenz des Newton-Verfahrens ist quadratisch, aber nur lokal!

- **Gedämpftes Newton-Verfahren:**

Idee: $d^{(j)} = -(Df(x^{(j)}))^{-1} f(x^{(j)})$ ist Abstiegsrichtung für $g(x) = \|f(x)\|_2^2$ ausgehend von $x^{(j)} \Rightarrow$ unter weiteren Vor. erhält man globale Konvergenz mit

$$x^{(j+1)} = x^{(j)} + \lambda_j d^{(j)} \quad \lambda_j \in (\lambda_{\min}, 1], \quad \lambda_{\min} > 0.$$

- **Vereinfachtes Newton-Verfahren:**

$$x^{(j+1)} = x^{(j)} - J^{-1} f(x^{(j)}), \quad J = Df(x^{(0)})$$

(ggf. zyklisches Aufdatieren von J).

- **Approximation des Jacobi-Matrix:**

– Ersetze partielle Ableitungen durch Differenzenquotienten, d.h.,

$$Df(x) = \left[\dots, \frac{\partial}{\partial x_k} f(x), \dots \right] \approx \left[\dots, \frac{1}{h_k} (f(x + h_k e_k) - f(x)), \dots \right] =: \Delta f(x).$$

– **Broyden-Rang-1 Aufdatierung:**

$x^{(j+1)} = x^{(j)} + w^{(j)}$, $w^{(j)} = -B_j^{-1} f(x^{(j)})$, wobei $B_0 \in \{Df(x^{(0)}), \Delta f(x^{(0)})\}$,

$$B_{j+1} := B_j + \frac{1}{w^{(j)T} w^{(j)}} f(x^{(j+1)}) w^{(j)T}.$$