

# Lösung linearer Ausgleichsprobleme

- **Lineares Ausgleichsproblem:**

$$\|r(x_*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$$

Für  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ : **Gaußsche Fehlerquadratmethode, LLS.**

- **Lösung des LLS für Rang  $A = n$ :**

Lösung  $x_*$  existiert und ist eindeutig,  $\|r(x_*)\|_2$  ist der zugehörige **Defekt**.

- **Lösung mit QR-Zerlegung:** Sei  $A = QR = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$  QR-Zerlegung mit  $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertierbare obere Dreiecksmatrix, dann

$$\|r(x)\|_2 = \|b - QRx\|_2 = \|Q^T b - Rx\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} x \right\|_2$$

$$\implies x_* = R_1^{-1} c_1, \quad \|r(x_*)\|_2 = \|c_2\|_2.$$

- **Lösung über Normalgleichungen:**

$$\begin{aligned} \|r(x)\|_2 = \min &\Leftrightarrow \|r(x)\|_2^2 = \min! \\ &\Leftrightarrow (b - Ax)^T (b - Ax) = \min! \end{aligned}$$

$$\implies A^T A x_* = A^T b \text{ bzw. } x_* = (A^T A)^{-1} A^T b = A^+ b.$$

Beachte: Lösung über QR-Zerlegung ist numerisch rückwärts stabil, Lösung über Normalgleichungen (Cholesky-Zerlegung von  $A^T A$  nicht)!

- **Moore-Penrose-Pseudoinverse:**

Zu  $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \exists$  eindeutige Matrix  $A^+ = X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mit

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad AXA &= A, & \text{(iii)} \quad (AX)^T &= AX, \\ \text{(ii)} \quad XAX &= X, & \text{(iv)} \quad (XA)^T &= XA. \end{aligned}$$

Für Rang  $A = n$ :  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ .

• **Lösung des LLS für Rang  $A < n$ :**

- Lösung existiert, ist aber nicht eindeutig.
- Zusatzbedingung liefert Eindeutigkeit:  $\|x_*\|_2 = \min\{\|x\|_2 \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ löst LLS}\}$ .  
 $\implies x_* = A^+b$ .

– **QR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung:**

Für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $\text{Rang } A = s \leq \min\{m, n\}$  existieren  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  orthogonal,  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und Permutationsmatrix  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so daß

$$AP = QR, \quad R = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_1 \in \mathbb{R}^{s \times s} \text{ invertierbar.}$$

- Alle Lösungen des LLS erhält man durch QR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung:

$$\|r(x)\|_2 = \|b - QR \underbrace{P^T x}_{=: \tilde{x}}\|_2 = \|Q^T b - R\tilde{x}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \right\|_2.$$

$$\implies x = P \begin{bmatrix} R_1^{-1}(c_1 - R_2\tilde{x}_2) \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \text{ löst LLS } \forall \tilde{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-s}.$$

- Lösung minimaler Norm erhält man durch **Singulärwertzerlegung (SVD)**

$A = U \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$ ,  $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{s \times s}$  invertierbare Diagonalmatrix,  $U, V$  orthogonal:

$$\|r(x)\|_2 = \|b - U \Sigma \underbrace{V^T x}_{=: \tilde{x}}\|_2 = \|U^T b - \Sigma \tilde{x}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \right\|_2$$

$$\implies x_* = V \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = A^+b.$$