

Satz 3.21:

Sei $\gamma(A) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und es seien während der numerischen Berechnung der LR-Zerlegung in $\mathbb{M}(p, t, e_{\min}, e_{\max})$ mit Maschinengenauigkeit \mathbf{u} alle Pivotelemente $\hat{a}_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, dann gilt

$$\hat{L} \cdot \hat{R} = A + H, \quad |H| \leq 3(n-1)\mathbf{u}(|A| + |\hat{L}||\hat{R}|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2).$$

Beweis: (Mit vollständiger Induktion über n .)

Induktionsanfang, $n = 1$: $\hat{l}_{11} = 1, \hat{r}_{11} = a_{11}$, also $h_{11} = 0$.

Induktionsschritt, $n - 1 \rightarrow n$: Sei $A =: \begin{bmatrix} \alpha & \omega^T \\ v & B \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$.

Der erste Schritt der Gauß-Elimination ergibt:

$$\hat{t} := \begin{bmatrix} v_1 \oslash \alpha \\ v_{n-1} \oslash \alpha \end{bmatrix}, \quad \hat{A}^{(1)} = B \ominus (\hat{t} \odot \omega^T).$$

Es gilt

$$\hat{t} = t + f, \quad |f| \leq \mathbf{u}|t| = \mathbf{u} \frac{1}{|\alpha|} |v| \quad (3.15)$$

und

$$\hat{A}^{(1)} = B - \hat{t}\omega^T + F, \quad |F| \leq 2\mathbf{u}(|B| + |\hat{t}||\omega^T|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2). \quad (3.16)$$

Zu Gleichung (3.16):

$$\begin{aligned} \hat{A}^{(1)} &= B \ominus (\hat{t} \odot \omega^T) = (B - \hat{t} \cdot \omega^T (1 + \varepsilon)) (1 + \delta), \quad |\varepsilon|, |\delta| \leq \mathbf{u} \\ &= B - \hat{t}\omega^T + \underbrace{\delta B - \varepsilon \hat{t}\omega^T - \delta \hat{t}\omega^T - \varepsilon \delta \hat{t}\omega^T}_{=: F}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} |F| &\leq |\delta||B| + |\varepsilon||\hat{t}||\omega^T| + |\delta||\hat{t}||\omega^T| + |\varepsilon||\delta||\hat{t}||\omega^T| \\ &\leq \mathbf{u}|B| + 2\mathbf{u}|\hat{t}||\omega^T| + \mathbf{u}^2|\hat{t}||\omega^T| \\ &\leq 2\mathbf{u}(|B| + |\hat{t}||\omega^T|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \end{aligned}$$

Dann berechne die LR-Zerlegung von $\hat{A}^{(1)} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\hat{L}_1 \cdot \hat{R}_1 = \hat{A}^{(1)} + H_1, \quad |H_1| \leq 3(n-2)\mathbf{u}(|\hat{A}^{(1)}| + |\hat{L}_1||\hat{R}_1|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2). \quad (3.17)$$

Nun gilt mit (3.15)

$$\hat{L}\hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{t} & \hat{L}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \omega^T \\ 0 & \hat{R}_1 \end{bmatrix} = A + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha f & H_1 + F \end{bmatrix} =: A + H.$$

Mit (3.16) folgt

$$\begin{aligned}
|\hat{A}^{(1)}| &\leq |B| + |\hat{t}||\omega^T| + 2\mathbf{u}(|B| + |\hat{t}||\omega^T|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \\
&= (1 + 2\mathbf{u})(|B| + |\hat{t}||\omega^T|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \\
\Rightarrow |H_1 + F| &\leq |H_1| + |F| \\
&\stackrel{(3.16),(3.17)}{\leq} 3(n-2)\mathbf{u}(|\hat{A}^{(1)}| + |\hat{L}_1||\hat{R}_1|) + 2\mathbf{u}(|B| + |\hat{t}||\omega^T|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \\
&\leq 3(n-2)\mathbf{u}\{(1 + 2\mathbf{u})(|B| + |\hat{t}||\omega^T|) + |\hat{L}_1||\hat{R}_1|\} + \\
&\quad 2\mathbf{u}(|B| + |\hat{t}||\omega^T|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \\
&= \underbrace{(3(n-2) + 2)}_{\leq 3(n-1)}\mathbf{u}(|B| + |\hat{t}||\omega^T|) + 3\underbrace{(n-2)}_{< n-1}\mathbf{u}|\hat{L}_1||\hat{R}_1| + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \\
&\leq 3(n-1)\mathbf{u}\{(|B| + |\hat{t}||\omega^T|) + |\hat{L}_1||\hat{R}_1|\} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2)
\end{aligned}$$

Außerdem erhält man für $n > 1$

$$|\alpha f| \leq |\alpha||f| \stackrel{(3.15)}{\leq} \mathbf{u}|v| \leq 3(n-1)\mathbf{u}|v|$$

und damit schließlich

$$\begin{aligned}
|H| &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ |\alpha f| & |H_1 + F| \end{bmatrix} \\
&\leq 3(n-1)\mathbf{u} \left\{ \begin{bmatrix} |\alpha| & |\omega^T| \\ |v| & |B| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ |\hat{t}| & |\hat{L}_1| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\alpha| & |\omega^T| \\ 0 & |\hat{R}_1| \end{bmatrix} \right\} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \\
&= 3(n-1)\mathbf{u}(|A| + |\hat{L}||\hat{R}|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2).
\end{aligned}$$

□