Berechnung der QR Zerlegung mit Householder-Transformationen

Sei $x, v \in \mathbb{R}^\ell$. Eine Matrix $P = I_\ell - \frac{2}{v^T v} v v^T \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ heißt **Householder-Matrix**. P ist orthogonal und symmetrisch, d.h., $P^T P = I_\ell$ und $P^T = P$. Der **Householder-Vektor** $v = v(x)$ kann so gewählt werden, daß

$$Px \;=\; \pm \|x\|_2 e_1 \;=\; \pm \|x\|_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe von Householder-Transformationen läßt sich durch den in Tafel 1 angegebenen Algorithmus die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bestimmen.

Bemerkungen:

a) Die Produkte $Q_k^T A^{(k-1)}$ werden nicht explizit gebildet, sondern sind so zu verstehen, daß man die Householder-Transformation P_k auf den betroffenen Teil der Matrix $A^{(k-1)}$ anwendet, d.h., auf den unteren rechten $(m-k+1) \times (n-k+1)$ Block von $A^{(k-1)}$ Das "Anwenden" ist dabei so zu verstehen wie in der Vorlesung vorgeführt, d.h., P_k wird nicht explizit berechnet, sondern es wird die spezielle Gestalt von P_k ausgenutzt, um die Produkte effizient zu implementieren.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} R = A^{(n)} &= Q_n^T A^{(n-1)} = Q_n^T \cdot Q_{n-1}^T A^{(n-2)} \\ &= \ldots = Q_n^T Q_{n-1}^T \cdots Q_1^T A^{(0)} = Q_n^T \cdots Q_1^T A, \end{aligned}$$

d.h., mit $Q = Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_n$ ist $A = QR$. Man hat also tatsächlich eine QR-Zerlegung von A berechnet.

Setze $A^{(0)} := A$.

`FOR` $k = 1, \ldots, n$

1. *Setze* $x_k = \begin{pmatrix} a_{k,k}^{(k-1)} \\ a_{k+1,k}^{(k-1)} \\ \vdots \\ a_{m,k}^{(k-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-k+1}$.

2. *Berechne Householder-Vektor* $v_k := v(x_k)$ *so, daß mit*

$$P_k := I_{m-k+1} - \frac{2}{v_k^T v_k} v_k v_k^T$$

   gilt: $P_k x_k = \pm \|x_k\|_2 e_1$.

3. *Sei* $Q_k = Q_k^T = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & P_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. *Berechne*

$$A^{(k)} \quad = \quad Q_k^T A^{(k-1)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1}^{(1)} & \ldots & \ldots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1,k-1}^{(1)} & \ldots & \ldots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \ldots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2,k-1}^{(2)} & \ldots & \ldots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \ldots & \ldots & a_{k-1,n}^{(k-1)} \\ \hline 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{k,n}^{(k)} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & a_{m,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{m,n}^{(k)} \end{array}\right)$$

`END FOR` k

Setze $R := A^{(n)}$.

Tafel 1: Berechnung der QR Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Householder-Transformationen.