Wiederholung: Normen

Eine **Norm** auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ mit

1. $\|v\| \geq 0$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung).

Vektornormen auf $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$):

$$\begin{aligned} \|x\|_p &:= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty \quad \textbf{(Hölder-}p\textbf{-Norm)}; \\ \|x\|_\infty &:= \max_{1\leq i\leq n} \|x_i\|, \quad \textbf{(Maximumnorm)}. \end{aligned}$$

In der Numerik sind neben der Maximumnorm gebräuchlich:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &:= \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \textbf{(Summennorm)}; \\ \|x\|_2 &:= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \sqrt{x^T x}, & \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \sqrt{x^* x}, & \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases} \quad \textbf{(Euklidische Norm, 2-Norm)}. \end{aligned}$$

Operatornormen (induzierte Normen):
Sei $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung (Matrix) und verwende $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{R}^m$, $\|\cdot\|_q$ auf $\mathbb{R}^n$, dann ist die zugehörige Operatornorm definiert durch

$$\|A\|_{p,q} = \sup_{\|x\|_p\neq 0} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p}.$$

Hier ist meist $p = q$ und damit

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p.$$

Operatornormen sind verträglich bzw. **sub-multiplikativ**, $\|AB\|_p \leq \|A\|_p\|B\|_p$, insbesondere $\|Ax\|_q \leq \|A\|_{p,q}\|x\|_p$. Dies gilt nicht für alle **Matrixnormen** (Normen auf $V = \mathbb{R}^{n\times m}$), z.B.

$$\|A\|_\triangle := \max |a_{ij}|, \quad A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|AB\|_\triangle = 2 > 1 = \|A\|_\triangle\|B\|_\triangle.$$

Die wichtigsten Matrix-/Operatornormen sind

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &:= \max_{1\le j\le m}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \quad \textbf{(Spaltensummennorm)},\\
\|A\|_2 &:= \sqrt{\max\{|\lambda|,\, \lambda\in\Lambda(A^TA)\}} \quad \textbf{(Spektralnorm)},\\
\|A\|_\infty &:= \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}| \quad \textbf{(Zeilensummennorm)}.
\end{aligned}$$

Keine Operatornorm, aber verträglich zur 2-Norm ist die **Frobeniusnorm**:

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^2}.$$

Normäquivalenz: $\forall p, q\in[1,\infty]\ \exists\ c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1\|A\|_p \le \|A\|_q \le c_2\|A\|_p$$

Insbesondere gelten folgende Ungleichungen:

$$\begin{gathered}
\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{m}\|A\|_2,\\
\max_{i,j}|a_{ij}| \le \|A\|_2 \le \sqrt{nm}\max_{i,j}|a_{ij}|,\\
\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_\infty,\\
\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_1,\\
\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty},\\
\|A(i:j,k:l)\|_p \le \|A\|_p, \quad 1\le i<j\le n,\ 1\le k<l\le m.
\end{gathered}$$