

Fehleranalyse

Betrachte $y = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $y \in W \subset \mathbb{R}^m$, sowie berechnetes Ergebnis

$$\hat{y} = y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

- **Vorwärtsfehler,**

- **absolut:** $\|y - \hat{y}\|$,
- **relativ:** $\|y - \hat{y}\|/\|y\|$,

wird durch **Vorwärtsanalyse** abgeschätzt.

- **Rückwärtsfehler,**

- **absolut:** η ,
- **relativ:** $\eta/\|x\|$,

mit $\eta := \inf\{\|\Delta x\|; \hat{y} = f(x + \Delta x)\}$.

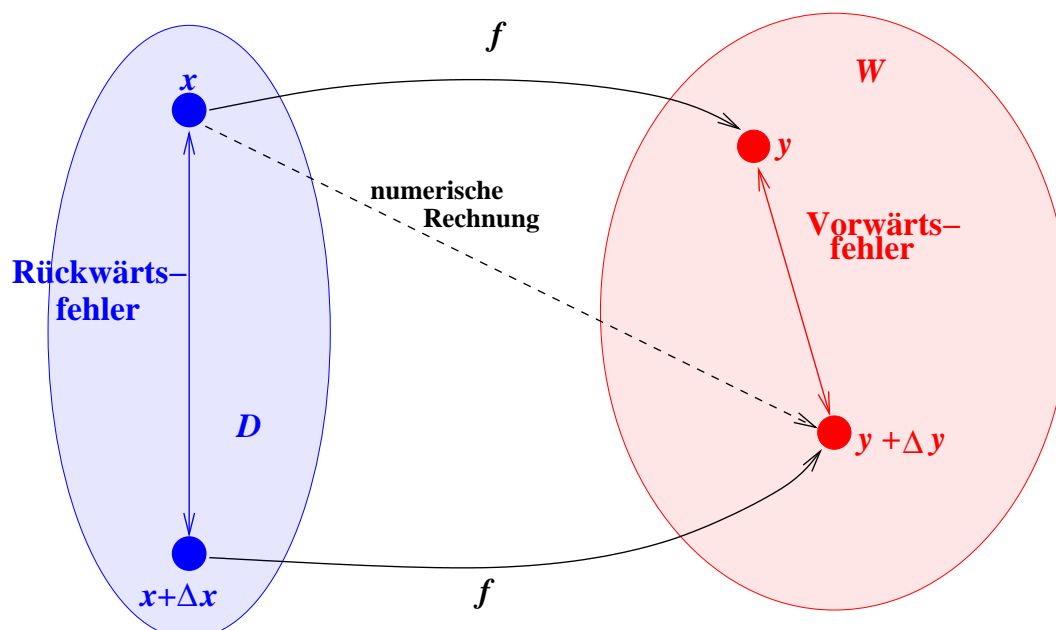
wird durch **Rückwärtsanalyse** abgeschätzt.

- **Numerische Stabilität** (eines Algorithmus':)

Algorithmus, der rel. Rückwärtsfehler von der Größenordnung der rel. Datenfehler $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ liefert, heißt **(numerisch) rückwärts stabil**.

Algorithmus, der rel. Vorwärtsfehler von der Größenordnung liefert, den ein rückwärts stabiler Algorithmus liefern würde, heißt **(numerisch) vorwärts stabil**.

- **rückwärts stabil \implies vorwärts stabil**



- **Konditionszahl,**

- **absolute:** Kleinste Zahl $c_{\text{abs}}(f, x)$, für die

$$\|y - \hat{y}\| \leq c_{\text{abs}}(f, x) \|\Delta x\| + o(\|\Delta x\|)$$

gilt;

- **relative:** Kleinste Zahl $c(f, x) = c_{\text{rel}}(f, x)$, für die

$$\frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y\|} \leq c_{\text{rel}}(f, x) \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} + o\left(\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\right)$$

gilt

- Ist f differenzierbar, dann gilt

$$c_{\text{abs}}(f, x) = \|f'(x)\|, \quad c(f, x) = c_{\text{rel}}(f, x) = \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \|f'(x)\|,$$

wobei f' der Jacobimatrix von f in x entspricht und $\|f'(x)\|$ die von den gewählten Vektornormen induzierte Operatornorm bezeichnet.

- **gut/schlecht konditioniert:**

$c(x) \approx 1 \Rightarrow$ gut konditioniert.

$c(x) \gg 1 \Rightarrow$ schlecht konditioniert.

$c(x) \ll 1$ kann auch schlecht sein wegen des „Verlusts der Information“ über einen möglicherweise großen Rückwärtsfehler.

- **Faustregel 1:**

$$\text{Vorwärtsfehler} \lesssim \text{Konditionszahl} \times \text{Rückwärtsfehler}$$

- **Faustregel 2:**

Gute Kondition & stabiler Algorithmus \Rightarrow zuverlässiges Ergebnis.

Schlechte Kondition *oder* instabiler Algorithmus \Rightarrow unsicheres Ergebnis.