

Beispiel 2.16 (Beispiel 2.13 fortgesetzt)

Wir nehmen an, daß $y_1 = a - \sqrt{a^2 - b}$ und \hat{y}_1 die entsprechende Lösung der gestörten quadratischen Gleichung

$$y^2 - 2(a + \Delta a)y + (b + \Delta b) = 0$$

ist. Für die Rückwärtsfehleranalyse benötigen wir einen Ausdruck der Form

$$\hat{y}_1 = (a + \Delta a) - \sqrt{(a + \Delta a)^2 - (b + \Delta b)}$$

Wie bei der Vorwärtsanalyse in Beispiel 2.13 erhält man

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= a(1 + \delta_4) - \left\{ \underbrace{a^2(1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3)^2(1 + \delta_4)^2}_{=1 + \delta_1 + \delta_2 + 2\delta_3 + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2)} - \underbrace{b(1 + \delta_1)(1 + \delta_3)^2(1 + \delta_4)^2}_{=1 + \varepsilon_2, \quad |\varepsilon_2| \leq 5\mathbf{u} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= a + a\delta_4 - \left\{ (a + a\delta_4)^2 - b \left(\underbrace{1 + \varepsilon_2 - \frac{a^2}{b}\varepsilon_1(1 + \delta_4)^2}_{=1 + \varepsilon_2 - \frac{a^2}{b}\varepsilon_1 + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2)} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= (a + a\delta_4) - \sqrt{(a + a\delta_4)^2 - (b + b\delta_b)} \end{aligned}$$

Wir können nun $\Delta a := a\delta_4$, $\Delta b := b\delta_b$ setzen und damit den relativen Rückwärtsfehler nach oben abschätzen, wobei zu beachten ist, daß der Rückwärtsfehler als Infimum aller möglichen Δx definiert ist:

$$\begin{aligned} \frac{|\eta_a|}{|a|} &\leq \frac{|\Delta a|}{|a|} \leq |\delta_4| \leq \mathbf{u} \\ \frac{|\eta_b|}{|b|} &\leq |\delta_b| \leq \underbrace{\left(5 + \frac{4a^2}{|b|} \right)}_{\text{Verstärkungsfaktor}} \mathbf{u} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \end{aligned}$$

Einen kleinen Rückwärtsfehler, wie man ihn bei einem numerisch rückwärts stabilen Algorithmus erwarten würde, erhalten wir falls $a^2 \approx |b|$. Ein großer Fehler ist möglich für $a^2 \gg b$.