

HA13. Integration

Abgabe der Lösung in Papierform. Alle selbst erstellten M-Files sind ausgedruckt einzureichen, sowie per Email einzuschicken. Erfüllen der Aufgaben mit Matlab ist durch eine Mitschrift der Session (Funktion `diary`) zu belegen. Die für einzelne Aufgaben relevanten Stellen in der Mitschrift sind durch die Aufgabennummer kenntlich zu machen. (Nicht relevante Teile sollten möglichst entfernt werden.)
Als Betreff für die zugesandten Emails ist
`HA13-Numerik-Übungsgruppe-Name1_Name2_Name3`
(Beispiel: `HA13-Numerik-Schneider-Mustermann_Musterfrau_Müller`)
oder `HA13-Numerik-Übungsgruppe-Hausaufgabengruppenname`
(Beispiel: `HA13-Numerik-Schneider-Die.Epsilons`) zu verwenden.

Theoretische Aufgabe

1. (a) Zeigen Sie dass die Mittelpunktsregel $Q = (b - a)f(\frac{a+b}{2})$ Polynome bis Grad 1 exakt integriert, also dass eine Gauß-Quadratur damit erreicht wird.
(b) Bestimmen Sie $\alpha_1, \alpha_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$Q := \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

eine Gauß-Quadratur-Formel (mit $n = 2$ Stützstellen) für das Intervall $[0, 1]$ ergibt.

Hinweis: Falls Sie auf ein nichtlineares Gleichungssystem in $\alpha_1, \alpha_2, x_1, x_2$ kommen, so können Sie zur Vereinfachung annehmen $\alpha_1 = \alpha_2$, müssen dann jedoch zeigen dass von der Lösung tatsächlich alle ursprünglichen Bedingungen erfüllt werden.

(3 Punkte)

Programmieraufgabe

1. (a) Integrieren Sie $I := \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ exakt und
(b) implementieren Sie
i. die zusammengesetzte Mittelpunktsregel (n Knoten, $h = 1/n$), $Q_M(n)$,
ii. die zusammengesetzte Trapezregel ($n + 1$ Knoten, $h = 1/n$), $Q_T(n)$ und
iii. die zusammengesetzte Simpsonregel ($n + 1$ Knoten, $h = 2/n$), $Q_S(n)$ und
iv. die zusammengesetzte Gauß-Regel aus Aufgabe 1(b) (n Knoten, $h = 2/n$, $Q_G(n)$, n muß gerade sein)
zur Bestimmung von I . Achten Sie dabei insbesondere darauf dass wirklich nur jeweils n bzw. $n + 1$ Funktionsauswertungen erfolgen.

- (c) Geben Sie den Fehler $I - Q(n)$ in einer Tabelle für $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$ an:

n	$I - Q_M(n)$	$I - Q_T(n)$	$I - Q_S(n)$	$I - Q_G(n)$
2				
⋮				
256				

- (d) Schätzen Sie mit den ermittelten Fehlern die Konvergenzordnungen p und q gemäß

$$|I - Q(n)| \approx c_1 h^p, \quad \text{bzw.} \quad |I - Q(n)| \approx c_2 n^{-q}.$$

Geben Sie diese in Tabellen analog zu obiger an.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass $h_{i+1} = \frac{h_i}{2}$ bzw. $n_{i+1} = 2n_i$.

(4 Punkte)